

УДК 62-85+681.587

РАБОТА ДВУХКАСКАДНОГО ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СЕРВОМЕХАНИЗМА В СКОЛЬЗЯЩЕМ РЕЖИМЕ

Аннакулова Г.К.

к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник,
Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз,
тел: (+99893) 527-94-90, e-mail: annaqulova_g@mail.ru

Игамбердиев К.А.

младший научный сотрудник,
Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз,
тел: (+99893) 380-62-40, e-mail: igamberdiev-71@mail.ru

В статье рассмотрено движение гидравлического сервомеханизма режима скольжения. Составлена математическая модель гидравлического следящего сервомеханизма. Решение задачи об определении движений, в гидравлическом сервомеханизме сведено к исследованию трехлистной фазовой плоскости динамической системы. Установлены условия существования скользкого режима движения системы. Полученные уравнения фазовых траекторий системы являются параболой с особой точкой в начале координат. Для исследования поведения траекторий вблизи начала координат применен критерий Ляпунова. Функция Ляпунова исследовалась в виде квадратичной формы. Установлены условия двух возможных сценариев поведения траекторий, при которых происходит смена характерных режимов работы гидравлического сервомеханизма: а) когда окрестность особой точки неустойчива; б) когда окрестность особой точки устойчива. Получены функции Ляпунова для автоколебательной системы и построены диаграммы фазовых траекторий и линии уровней функций Ляпунова системы при различных значениях параметров системы.

Ключевые слова: математическая модель, функции Ляпунова, нелинейность, скользкий режим, автоколебания, устойчивость, управления, гидравлический сервомеханизм.

TWO-HYBRID HYDRAULIC SERVOMECHANISM OPERATION IN SLIDING MODE

Annaqulova G.K., Igamberdiev K.A.

The article deals with the motion of a hydraulic servomechanism of the sliding mode. A mathematical model of the hydraulic servomechanism is made. The solution of the problem of determining the motions in hydraulic servomechanism is reduced to the investigation of the three-leaved phase plane of the dynamical system. The conditions for the existence of a sliding mode of motion of the system are established. The resulting equations of the phase trajectories of the system are parabolas with a singular point at the origin. To investigate the behavior of trajectories near the origin, the Lyapunov criterion is applied. The Lyapunov function was investigated in a quadratic form. The conditions of two possible scenarios for the behavior of trajectories are established under which the characteristic modes of operation of the hydraulic servomechanism change: a) when the neighborhood of a singular point is unstable; b) when the neighborhood of the singular point is stable. The Lyapunov functions for the self-oscillating system are obtained and diagrams of the phase trajectories and level lines of the Lyapunov system functions are constructed for various values of the parameters of the system.

Keywords: mathematical model, Lyapunov's functions, nonlinearity, sliding mode, auto oscillations, stability, control, hydraulic servomechanism.

SIRG'ALUVCHI REJIMDAGI IKKI POG'ONALI YORDAMCHI MEXANIZMNING ISHLASHI

Annaqulova G.K., Igamberdiyev K.A.

Maqolada sirg'aluvchi rejim hisobga olingan holdagi gidravlik yordamchi mexanizm harakati ko'rilgan. Gidravlik yordamchi mexanizmining matematik modeli tuzilgan. Tizim harakatida sirg'aluvchan rejim mavjudligi shartlari belgilangan. Gidravlik mexanizm harakatini aniqlash masalasi dinamik tizimlarda, uch qavatli fazoviy tekislikni tadqiq qilish masalasiga keltirilgan. Olingan fazoviy tenglamalarning maxsus nuqtasi koordinatalar boshlanishida joylashgan parabolalardan iborat. Koordinatalar boshlanishi yaqinida trayektoriyalarning holatlarini tadqiq etish uchun Lyapunov turg'unlik mezoni qo'llanilgan. Lyapunov funksiyasi kvadratlik forma ko'rinishida izlangan. Gidravlik yordamchi mexanizm xos ishlash rejimi trayektoriyalar holatlarining mumkin bo'lgan ikki xil senariyda o'zgarishi shartlari

belgilangan: a) maxsus nuqta atrofi noturg'un bo'lgan holda; b) maxsus nuqta atrofi turg'un bo'lgan holda. Avtotebranishli gidravlik tizim uchun Lyapunov funksiyalari aniqlangan. Tizim parametrlarining turli qiymatlarida fazoviy trayektoriyalar va Lyapunov funksiyalari chiziqlari sathlari diagrammalari qurilgan.

Kalit so'zlar: matematik model, Lyapunov funksiyalari, chiziqsizlik, sirg'aluvchi rejim, avtotebranish, turg'unlik, boshqarish, gidravlik servomexanizm.

1. Введение

Развитие автоматизации производственных процессов и внедрение систем управления в различные области техники ставят новые более сложные задачи. Повышаются требования к точности, быстрдействию систем и их элементов. Особую роль в системах управления играют сервомеханизмы, входящие в них в качестве составных частей.

В системах управления применяются электрические, гидравлические, комбинированные электрогидравлические и др. сервомеханизмы. Сервомеханизмом называют устройство, содержащее усилители, исполнительный двигатель (гидромотор), цепь обратной связи и др. Сервомеханизмы представляют собой существенно нелинейные системы, содержащие элементы с нелинейными характеристиками. Системы с сухим трением, виброударные, релейные, системы управления с переменной структурой, многочисленные механические, электро и радиотехнические системы с негладкими характеристиками отдельных элементов исследуется как динамические модели с разрывными нелинейностями или нелинейностями кусочно-непрерывного типа [1,2,3]. Использование бифуркационной теории в прикладных задачах позволило обнаружить и рассмотреть тонкие нелинейные эффекты – возникновение опасных вибраций [4,5,6,7,8], случаи потери управления движением, новые подходы к управлению колебаниями, а также сформулировать адекватные динамические модели, пригодные для инженерных расчетов [9].

При определенных условиях в сервомеханизме возникают автоколебания, скользящие режимы, нарушается устойчивость изучение этих условий и определение параметров, при которых происходит, смена характерных режимов работы сервомеханизма является актуальной задачей.

2. Постановка задачи

Движение гидравлического сервомеханизма в режиме свободных колебаний описывается следующей системой уравнений [10]

$$T_3 \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = -x; \tag{1}$$

$$T_s \frac{dx}{dt} = \psi(\sigma); \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \psi(\sigma) &= \sigma - \varepsilon \text{ при } \sigma - \psi(\sigma) > \varepsilon \text{ и } \dot{x} > 0; \\ \psi(\sigma) &= \sigma + \varepsilon \text{ при } \sigma + \psi(\sigma) < -\varepsilon \text{ и } \dot{x} < 0; \\ \psi(\sigma) &= 0 \text{ при } |\sigma - \psi(\sigma)| < \varepsilon + \Delta \text{ и } \dot{x} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение задачи об определении движений, существующих в гидравлическом сервомеханизме сводится к исследованию фазовой плоскости σ, x . Нелинейная функция $\psi(\sigma)$ описывается на отдельных участках различными зависимостями, поэтому фазовая плоскость σ, x является многолистной в рассматриваемом случае трехлистной [10].

При исследовании системы гидравлического сервомеханизма рассмотрим два основных случая. Первый случай, когда характеристические уравнения, описывающие изменение координат σ и x , имеют действительные корни ($T_s / T_3 > 1$); второй случай, когда уравнения, описывающие изменение координат σ и x , имеют комплексные корни ($T_s / T_3 < 1$).

Поскольку нелинейная функция $\psi(\sigma)$ описывается тремя зависимостями (3), то фазовая плоскость σ, x будет состоять из трех листов. Линиями переключения на фазовой плоскости служат прямые

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm \varepsilon, \\ \sigma &= \pm(\varepsilon + \Delta). \end{aligned}$$

Значения $\sigma = \pm(\varepsilon + \Delta), x = \pm(\varepsilon + \Delta)$ определяют зону нечувствительности.

На фазовой плоскости будут образовываться зоны нечувствительности ограниченные линиями переключения и прямыми $x = \pm(\varepsilon + \Delta)$. При исследовании фазовой плоскости эти области будем рассматривать как области покоя системы, поскольку изображающая точка, попадая на границу области покоя, уже не уходит из нее.

3. Метод решения

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} T_3 \frac{d\sigma}{dt} + \sigma &= -x, \\ T_s \frac{dx}{dt} &= \sigma - \varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

Введем обозначения

$$-\varepsilon = \eta_1, \quad x + \varepsilon = \xi_1, \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_s}{T_3}}, \tag{5}$$

С учетом (5) система уравнений (4) принимает вид

$$\begin{aligned} T_3 \frac{d\eta_1}{dt} + \eta_1 &= -\xi_1, \\ T_s \frac{d\xi_1}{dt} &= \eta_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Исключая из соотношений (6) переменную t и введя проинтегрируя имеем [11]

$$\eta_1^2 + 4h^2\eta_1\xi_1 + 4h^2\xi_1^2 = c_1 \left[\frac{\eta_1 + 2h(h + \sqrt{h^2 - 1})}{\xi_1} \sqrt{h^2 - 1} \right] \quad (7)$$

Из соотношения (7) видно, что фазовыми траекториями являются параболы. Особая точка этих траекторий имеет координаты $\eta_1 = 0, \xi_1 = 0$ и является устойчивым узлом.

После перехода к координатам σ и x с учетом (5) уравнение фазовых траекторий на первом листе соответствующее первому условию (3) принимает вид

$$(\sigma - \varepsilon)^2 + 4h^2(x + \varepsilon)(\sigma + x) = c_2 \left[\frac{(\sigma - \varepsilon) + 2h(h + \sqrt{h^2 - 1})(x + \varepsilon)}{(\sigma - \varepsilon) + 2h(h - \sqrt{h^2 - 1})(x + \varepsilon)} \sqrt{h^2 - 1} \right] \quad (8)$$

На плоскости σ, x особая точка траекторий листа I имеет координаты $x = -\varepsilon, \sigma = \varepsilon$. Для исследования поведения траекторий вблизи начала координат применим к системе (6) критерий Ляпунова [5,12].

Функцию Ляпунова определяем в форме

$$V_1(\eta_1, \xi_1) = \frac{1}{2} [\gamma_1\eta_1^2 + 2\gamma_{12}\eta_1\xi_1 + \gamma_2\xi_1^2] \quad (9)$$

Для этого рассмотрим систему уравнений (6), перейдем к переменным

$$\eta_1 = \sigma - \varepsilon = x_2, \quad \xi_1 = x + \varepsilon = x_1 \quad (10)$$

тогда с учетом (10) система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= c_2 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -c_1 x_1 - c_1 x_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $c_1 = 1/T_3, c_2 = 1/T_S$.

Неизвестные коэффициенты γ_1, γ_{12} , и γ_2 определяем таким образом, чтобы производная dV/dt была отрицательно определенной функцией вида

$$\frac{dV_1}{dt} = -(x_1^2 + x_2^2). \quad (12)$$

Производная функции (9) имеет форму

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \gamma_1 x_1 \frac{dx_1}{dt} + \gamma_{12} \left(\frac{dx_1}{dt} x_2 + x_1 \frac{dx_2}{dt} \right) + \\ &+ \gamma_2 x_2 \frac{dx_2}{dt}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом системы (11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -\gamma_{12} c_1 x_1^2 + (\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1 - \gamma_{12} c_1) x_1 x_2 + \\ &+ (\gamma_{12} c_2 - \gamma_2 c_1) x_2^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнивая выражения (12) и (14) имеем

$$\gamma_{12} c_1 = 1, \quad \gamma_{12} c - \gamma_2 c_1 = -1,$$

$$\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1 - \gamma_{12} c_1 = 0 \quad (15)$$

Разрешая эти уравнения относительно γ_1, γ_{12} , и γ_2 определяем

$$\gamma_1 = \frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_2}, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{c_1}, \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{c_1} + \frac{1}{c_1} \quad (16)$$

Таким образом, функция Ляпунова (9) принимает вид

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{c_2} + \frac{1}{c_1} \right) x_1^2 + 2 \frac{1}{c_1} x_1 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{c_2}{c_1^2} + \frac{1}{c_1} \right) x_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Из условий

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_{12}^2 &> 0, \quad \gamma_2 > 0 \\ \left(\frac{2}{c_2} + \frac{1}{c_1} \right) \left(\frac{c_2}{c_1^2} + \frac{1}{c_1} \right) - \frac{1}{c_1^2} &> 0. \end{aligned} \quad (18)$$

После упрощений соотношение (18) приводит к условиям

$$\frac{c_1}{c_2} < -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

возможности двух сценариев поведения траекторий:

а) при

$$\frac{c_1}{c_2} < \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad V_1(x_1, x_2)$$

положительно определенная функция для любых значений x_1 и x_2 , тогда траектория системы направлена во внешность эллипса (17)

б) при

$$\frac{c_1}{c_2} > \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

траектория системы направлена во внутрь эллипса.

После перехода к координатам x и σ функция Ляпунова на первом листе I принимает вид

$$\begin{aligned} V_1(x + \varepsilon, \sigma - \varepsilon) &= \frac{1}{2} [2(T_S - T_3)(x + \varepsilon)^2 + \\ &+ 2T_3(\sigma - \varepsilon)(x + \varepsilon) \left(\frac{T_3}{T_S} + T_3 \right) (\sigma - \varepsilon)^2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим в качестве листа II ту часть фазовой плоскости, где нелинейная функция $\psi(\sigma)$ имеет вид $\psi(\sigma) = \sigma + \varepsilon$.

Система уравнений (1) - (3) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} T_3 \frac{d\sigma}{dt} + \sigma &= -x, \\ T_S \frac{dx}{dt} &= \sigma + \varepsilon. \end{aligned} \quad (20)$$

Введя обозначения $\sigma + \varepsilon = \eta_2, x - \varepsilon = \xi_2$ и исключая переменную t , после интегрирования получаем

$$\eta_2^2 + 4h^2\eta_2\xi_2 + 4h^2\xi_2^2 =$$

$$= c_3 \left[\frac{\eta_2 / \xi_2 + 2h(h + \sqrt{h^2 - 1})}{\eta_2 / \xi_2 - 2h(h + \sqrt{h^2 - 1})} \right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}}} \quad (21)$$

Из соотношения (21) видно, что фазовыми траекториями являются параболы. Особая точка этих траекторий имеет координаты $\eta_2 = 0, \xi_2 = 0$, является устойчивым узлом.

После перехода к координатам σ и x с учетом обозначений, уравнение фазовых траекторий на втором (II) листе принимает вид

$$(\sigma + \varepsilon)^2 + 4h^2(\sigma + x)(x - \varepsilon) =$$

$$= c_4 \left[\frac{(\sigma + \varepsilon) + 2h(h + \sqrt{h^2 - 1})(x - \varepsilon)}{(\sigma + \varepsilon) + 2h(h - \sqrt{h^2 - 1})(x - \varepsilon)} \right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}}} \quad (22)$$

На плоскости σ, x координаты особой точки листа (II) будет $x = \varepsilon, \sigma = -\varepsilon$.

Аналогично выше проведенными выкладками функция Ляпунова представляется в виде

$$V_2(x - \varepsilon, \sigma + \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(2T_s - T_3)(x - \varepsilon)^2 + 2T_3(\sigma + \varepsilon)(x - \varepsilon) + \left(\frac{T_3}{T_s} + T_3 \right) (\sigma + \varepsilon)^2 \right] \quad (23)$$

Таким образом, движение системы в случае I всегда будет устойчивым.

На рисунке 1 а), б), в) и г) представлены функции Ляпунова $V_1(x, \sigma)$ и $V_2(x, \sigma)$ и их линии уровней для случаев: $\varepsilon = 0,07; \varepsilon = 0,03; \varepsilon = 0,1; T_3 = -1; T_3 = 0,6$.

На рисунке 2 а), в) и в), г) а также д), е) приведены фазовые траектории а), б) временная реализация колебаний в), г) и д), е) при значениях параметров $\varepsilon = 0,1; \varepsilon = 1,5; T_3 = 1; T_s = 0,3$ для систем (4) и (20), описывающих две части фазовой плоскости I и II системы (1) – (3).

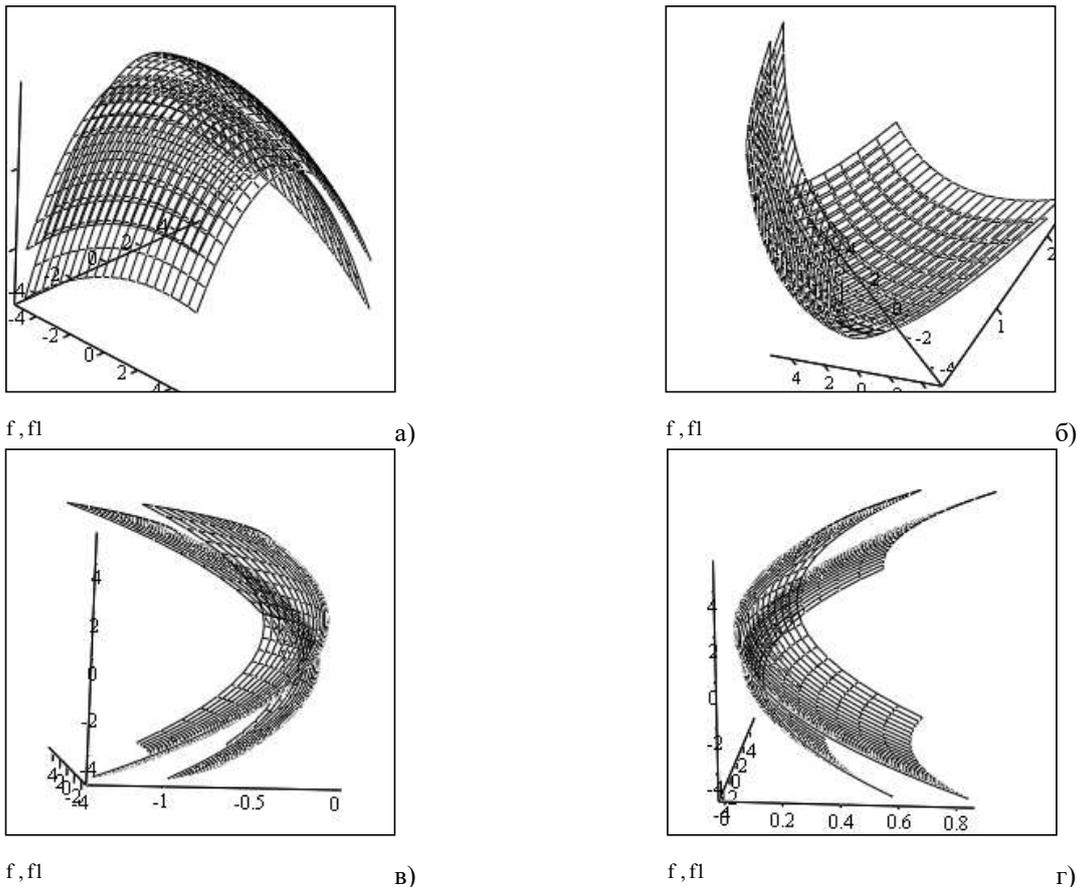


Рисунок 1. Линии уровней функций Ляпунова для значений параметров: а) $\varepsilon = 0,07$; б) $\varepsilon = 0,03$; в), г) $\varepsilon = 0,1; T_3 = -1; T_s = 0,6, f \rightarrow V_1(x, \sigma, t), f_1 \rightarrow V_2(x, \sigma, t)$

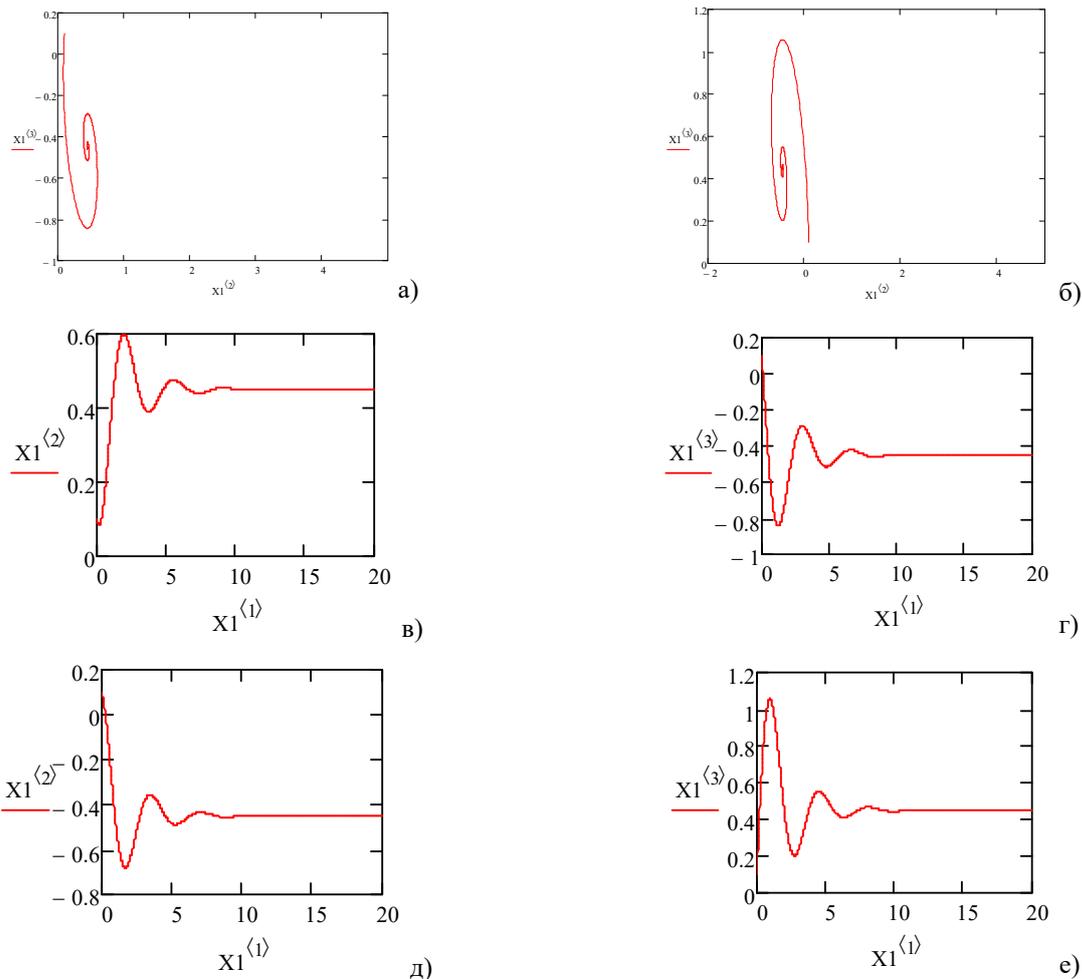


Рисунок 2. Реализация колебаний а, б – фазовые траектории в, г, д, е – временная реализация колебаний при значениях параметров $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 1,5$; $T_3 = 0,3$; $T_s = 0,6$, $X1^{(1)} \rightarrow t$, $X1^{(2)} \rightarrow x$, $X1^{(3)} \rightarrow \sigma$

4. Заключение

Составлена математическая модель движения гидравлического следящего сервомеханизма. Исследование динамической системы показало, что фазовая плоскость системы трехлистая, полученные уравнения фазовых траекторий являются параболами

с особой точкой в начале координат. Для исследования поведений траекторий вблизи начала координат применен критерий Ляпунова. Получены функции Ляпунова для автоколебательной системы и построены диаграммы фазовых траекторий и линии уровня функции Ляпунова системы при различных значениях параметров системы.

Литература

- [1] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
- [2] Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. – М.: Наука, 1994, –282 с.
- [3] Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. – М.: Наука, 1974. – 576 с.
- [4] Sweet J. A. Basic study of water removal at the press – Pulp and paper magazine of Canada, 1961, 62 n 7, p 367.
- [5] Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М. Мир, 1968. – 432 с.
- [6] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
- [7] Геллч А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [8] Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. – М.: Наука, 1967.
- [9] Уткин В.И. Скользящие движения в задачах оптимизации и управления. - М.: Наука, 1981. – 367 с.
- [10] Горская Н.С. и др. Динамика нелинейных сервомеханизмов. – М.: Наука, 1959.
- [11] Аннакулова Г.К., Лебедев О.В. Динамические режимы и хаотические движения элементов приводов машин.
- [12] Аннакулова Г.К., Абдуллаева М.Г., Игамбердиев К.А. Построение функций Ляпунова для сильно нелинейных автоколебательных систем // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент. 2016, №2, - С. 71-75