УДК 316.51

МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОИСКА КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ*

Мухамедиева Д.Т., Ниёзматова Н.А.

dilnoz134@rambler.ru; n_nilufar@mail.ru

Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий

В данной работе представлен один из подходов решения задачи многокритериальной оптимизации с нечеткой целью. Необходимость использования информации качественного характера признается многими исследователями, и предложены различные пути формализации и решения этой проблемы. Для описания частных критериев и ограничений им было предложено использование функций желательности. Последние принимают значения, непрерывно возрастающие от 0 до 1 при изменении соответствующих параметров качества от наименее к наиболее желательным значениям. Конкретный вид функций желательности задается лицом, принимающим решения (ЛПР), исходя из его субъективных представлений. Вопросы построения нечетких моделей классификации, оценки и прогнозирования выражены в качестве задачи многокритериальной оптимизации с четырьмя целевыми функциями. Введены понятия Парето-оптимального решения и наилучшего компромиссного решения уровня α многокритериальной задачи. Сформулированы и доказаны теоремы, устанавливающие взаимосвязь между ними. Предложен метод решения многокритериальной задачи на основе поиска компромиссных решений уровня α. Корректное использование текущей информации об объекте в процессе моделирования, то есть определение адекватности модели, имеет важное значение. В этом плане сформулированы основные проблемы разработки моделей слабоформализуемых процессов.

Ключевые слова: теория нечетких множеств, нечеткие модели, многокритериальная оптимизация, база знаний, функция принадлежности, принятие решений, оценка, прогноз.

Цитирование: *Мухамедиева Д.Т., Ниёзматова Н.А.* Метод решения многокритериальной задачи оптимизации поиска компромиссных решений // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2019. — № 1(19). — С. 109–119.

1 Введение

Эффективность функционирования достаточно сложных реальных объектов или процессов, как правило, характеризуется совокупностью частных критериев, находящихся зачастую во взаимном противоречии друг с другом, когда улучшение по одному из показателей ведет к ухудшению по-другому и наоборот, и удовлетворение требованиям всех критериев невозможно. Кроме того, критерии, а также ограничения, обычно сформулированы весьма неточно. В этих условиях нахождение эффективных решений невозможно без учета неточной, качественной информации о предпочтениях различных критериев, о желаемом характере процессов – росте или уменьшении параметров качества, о диапазоне их изменения. По мере усложнения задачи роль такого рода неточной качественной информации возрастает и во многих случаях становится определяющей [1]. Как указывается в [2], при наличии всего

*Работа выполнена в рамках ГНТП по проекту прикладных исследований, грант № БВ-В-Ф4-011.

лишь двух критериев в задачах оптимизации неизбежно присутствуют субъективные факторы, связанные, например, с ранжированием частных критериев. В определенной степени подобные трудности могут быть устранены путем упрощения постановки задачи. Например, можно выделить какой-либо один главный критерий качества, а остальные рассматривать как ограничения. Другим путем является использование метода последовательных уступок [2]. Однако такие подходы ведут к огрублению исходной задачи и не устраняют качественные, субъективные элементы, перенося их из постановки задачи на этап анализа результатов. Потребность количественного ранжирования частных критериев и неопределенность при их описании в задачах многокритериальной оптимизации объективно являются источниками субъективизма, неопределенности. Необходимость использования информации качественного характера признается многими исследователями, и предложены различные пути формализации и решения этой проблемы. Для описания частных критериев и ограничений им было предложено использование функций желательности. Последние принимают значения, непрерывно возрастающие от 0 до 1 при изменении соответствующего параметров качества от наименее к наиболее желательным значениям. Конкретный вид функций желательности задается лицом, принимающим решения (ЛПР), исходя из его субъективных представлений. Путем свертки частных функций желательности строится глобальный критерий качества процесса, максимизация которого доставляет оптимум. Этот метод получил широкое распространение в планировании экспериментов при поиске оптимальных условий [3]. Он успешно применялся при решении задач оптимизации процессов химической технологии, обработки материалов, в металлургии и других отраслях [4-6]. Из определения функций желательности следует, что при решении задач оптимизации они как по форме, так и своему смысловому содержанию фактически эквивалентны функциям принадлежности нечетких множеств. Другой подход к методам формализации описания нечетких, качественных характеристик был предложен Л.А.Заде [7].

Теория нечетких множеств, особенно ее концептуальная основа и математический аппарат для работы с объектами лингвистической природы, оказались плодотворными, эффективными средствами постановки и решения задач многокритериальной оптимизации при наличии неопределенностей нестатистического характера. При этом следует отметить, что существует чрезвычайно большое многообразие такого рода задач, и поэтому не существует единой универсальной методики их решения [8-10].

Задачи математического программирования относятся к детерминированным моделям принятия решений. Необходимо заметить, что данный раздел «составляет» классику исследования операций и в теоретическом плане является хорошо «проработанным» [1-3]. Однако реальные прикладные задачи оказываются намного сложнее, чем предусмотрено классическими постановками. Эта сложность обусловливается необходимостью учета многих критериев при принятии решения, порождая класс задач многокритериальной оптимизации. Исключительное значение для решения таких задач играет принцип Парето, согласно которому оптимальное решение следует выбирать среди Парето-оптимальных точек, образующих область компромисса, причем выбор окончательного решения осуществляется с учетом дополнительной информации. Заметим, что принцип Парето не является универсальным и применяется только при выполнении ряда аксиом. И даже если эти аксиомы выполняются, построение множества Парето может вызывать значительные трудности [4-7]. В основе другого подхода к решению проблемы многокритериальное оптимизации лежит идея последовательных уступок, основанная на ранжировании критериев в порядке убывающей важности и решении однокритериальной задачи, в которой самый важный критерий принимает экстремальное значение, а на остальные накладываются ограничений. Недостаток данного подхода заключается в усложнении ограничивающих условий и необходимости анализа различных вариантов задачи. Переход к однокритериальной задаче возможен и при агрегировании отдельных критериев в некоторый обобщенный (интегральный) критерий с помощью подходящей свертки [8-10]. При внешней привлекательности такой подход порождает ряд вопросов: неясно, как определить вид функции агрегирования; трудно или невозможно обосновать принцип оценки ее параметров (весовых коэффициентов, показателей степеней и т.п.); проблематична интерпретация полученных результатов [11-15].

2 Постановка задачи

В большинстве случаев ограничения параметрических моделей представляют собой математическое описание и количественное выражение самых разнообразных условий, от которых зависит некоторый технический или производственный процесс. Это разнообразие может сказаться, в частности, и в том, что причины, влияющие на изменение величин, при помощи которых выражаются соответствующие ограничения, необходимо рассматривать как независимые, но действующие одновременно. Задачи такого рода естественно описывать при помощи нескольких параметров. Часто имеется только "расплывчатая" - нечёткая информация о коэффициентах параметрической модели. В качестве математического аппарата, позволяющего формализовать нечёткую информацию, в работе применяется теория нечётких множеств.

При решении практических задач для построения системы классификации, оценки и прогнозирования в условиях неопределенности, необходимую нечеткую информацию, обладающую ностохастическими характеристиками, можно разделить на две части: численную (количественную) и полученную от эксперта лингвистическую (качественную) части. Большинство нечетких систем используют знания второго типа – чаще всего данные, описываемые в виде баз правил нечеткого вывода, которые объединяются в системы нечетких выводов. Алгоритмы построения нечетких логических моделей, основанных на правилах нечеткого вывода, играют основную роль при решении задач классификации, оценки и прогнозирования в условиях неопределенности входных данных.

Формирование правил нечеткого вывода при построении моделей классификации, оценки и прогнозирования состояния слабоформализуемых процессов определяют важность оптимального сокращения количества правил.

Корректное использование текущей информации об объекте в процессе моделирования, то есть определение адекватности модели, имеет важное значение. В этом плане сформулированы основные проблемы разработки моделей слабоформализуемых процессов.

Традиционные нечеткие системы обладают некоторыми недостатками, поэтому небоходимо привлекать экспертов той или иной области для формирования правил и функций принадлжености. Это в свою очередь является фактором возникновения целого ряда неудобств. Адаптивные нечеткие системы (adaptive fuzzy systems) решают данную проблему. В подобных системах в процессе обучения осуществляется настройка их параметров на основе экспериментальных данных. Процесс адаптации нечетких систем состоит из двух этапов: 1) создание лингвистических правил; 2) настройка параметров модели. Для создания нечетких правил необходимы соответствующие функции, а для принятия нечеткого вывода нужны правила.

Вопросы построения нечетких моделей классификации, оценки и прогнозирования можно выразить в качестве задачи многокритериальной оптимизации с четырьмя целевыми функциями

$$f_1(S) \to \max, f_2(S) \to \min, f_3(S) \to \min, f_4(S) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}(y_j - \hat{y}_j)^2 \to \min .$$

Здесь $f_1(S)$ – количество правильно классифицированных объектов с использованием множества правил S; $f_2(S)$ – количество нечетких правил во множестве правил S; $f_3(S)$ – общее количество элементов множества S и $f_4(S)$ – среднеквадратическая погрешность между полученными и ожидаемыми результатами модели. Таким образом, задача сводится к решению задачи многокритериальной оптимизации.

3 Решение проблемы

Задача многокритериальной оптимизации имеет следующий вид:

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x)]^T \to \min,\ x \in X \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered} f_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j; \\ k \in Q = \{1, 2, ..., q\}; \\ x = \{x \in R^n | Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}; \\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = \overline{1, m}\right). \end{gathered}$$

Задача многокритериальной оптимизации с нечеткой целью предполагает нахождение таких x

$$f_k(x) \leqslant \tilde{g}_k,\quad k = 1, 2, ..., Q,\quad x \in X, \tag{2}$$

где $\tilde{g}_k$ - нечеткое множество.

$$\mu_k(f_k(x)) = \begin{cases} 1, & f_k(x) \leqslant g_k \\ 1 - \frac{f_k(x) - g_k}{t_k}, & g_k \leqslant f_k(x) \leqslant g_k + t_k \\ 0, & f_k(x) \geqslant g_k + t_k. \end{cases} \tag{3}$$

Решение нечеткой задачи (2) может быть преобразован к решению четкой задачи

$$\lambda \to \max, \mu_k(f_k(x)) \geqslant \lambda, x \in X \tag{4}$$

Решение $x^0 \in X$ называется Парето оптимальным решением, если для всех y

$$\mu_k(f_k(y)) \leqslant \mu_k(f_k(x^0)) \text{ и хотя бы одного}$$

$$\mu_S(f_S(y)) < \mu_S(f_S(x^0))$$

Решение $x^0 \in X$ называется оптимальным по критерию типа Парето, если не существует $y \in X$, лучшее по критерию типа Парето, чем x^0.

Введем понятие улучшаемости решения $y \in X$ по критерию типа Парето в нечеткой среде: решение $y \in X$ назовем улучшаемым, если существует решение $x^0 \in X$, которое лучше y по критерию типа Парето.

Утверждение 1. Решение $x^0 \in X$ улучшаемо в ситуации принятия многоцелевых нечетких решений $f(x) = [f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)]$ тогда и только тогда, когда существует вектор $\gamma \in R^Q$, для которого выполнены неравенства

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) \leqslant c^k \quad \mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right) < c^S$$

для всех $k \in \{1, ..., Q\}$ и хотя бы одного $S \in \{1, ..., Q\}$, где $c^k = c - \gamma_k$, $c = = \max\limits_y \min\limits_k \left[\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right].$

Доказательство. Пусть требуемые неравенства выполнены, тогда согласно определению c^k существует $y \in X$ для которого справедливо $c \leqslant \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k$, и следовательно, $c^k \leqslant \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right),\ \mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right) < c^S \leqslant \mu_S\left(f_S\left(y\right)\right)$
$\mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right) \leqslant c^k \leqslant \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right)$ для всех $k \in \{1, ..., Q\}$ или хотя бы одного $S \in \{1, ..., Q\}$. Эти неравенство показывают, что решение $x^0 \in X$ улучшаемо.

Утверждение 2. Пусть решение $x^0 \in X$ улучшаемо и пусть $y \in X$ является тем решением, которое лучше решения x^0 по критерию Парето. Положим $\gamma_k = \mu_S\left(f_S\left(y\right)\right) - - \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right)$ для всех $k \in \{1, ..., Q\}$, где

$$S : \mu_S\left(f_S\left(y\right)\right) > \mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right).$$

Тогда $\max\limits_k \left[\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right] = \min\limits_y \left[\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right] = \mu_S\left(f_S\left(y\right)\right).$
Учитывая, что для всех γ из R^Q

$$\min_k \left[\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right] \leqslant c, \text{ получаем}$$

$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) + \gamma_k \leqslant \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k \leqslant \max\limits_k \left[\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right] = \min\limits_y \left[\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right] \leqslant c$
$\mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right) + \gamma_S < \mu_S\left(f_S\left(y\right)\right) + \gamma_S \leqslant c$ для всех $k \in \{1, ..., Q\}$ или хотя бы одного $S \in \{1, ..., Q\}$.

Отсюда следует справедливость доказываемых неравенств.

Утверждение 3. Решение $x^0 \in X$ улучшаемо в ситуации принятия многоцелевых решений тогда и только тогда, когда существует вектор γ из множества

$$\Gamma = \left\{\gamma \in \mathrm{R}^{\mathrm{Q}} : \max_y \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) - \min_y \mu_\rho\left(f_\rho\left(y\right)\right) \geqslant \gamma_\rho - \gamma_k, \ \ (\rho, k = 1, ..., Q,\ \rho \neq k)\right\}$$

такой, что выполнены неравенства утверждение 1.

Доказательство.
$\left[\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) + \gamma_k\right] \leqslant \left(\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right) \leqslant \max\limits_k \left[\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) + \gamma_k\right] = \min\limits_\rho \left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(y\right)\right) + \gamma_\rho\right] \leqslant c$, для всех $k, \rho \in \{1, ..., Q\}$.

$$\left(\mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right) + \gamma_S\right) < \left(\mu_S\left(f_S\left(y\right)\right) + \gamma_S\right) \leqslant c$$

Отсюда следует справедливость доказываемых неравенств.

Следствие. Если оценочные функционала $\left\{\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right)\right\}_{k=1}^{Q}$ получены после применения естественной нормализации, то область Γ имеет вид:

$$\Gamma = \left\{\gamma \in \mathrm{R}^{\mathrm{Q}}; \left|\gamma_\rho - \gamma_k\right| \leqslant 1, \quad k, \rho = 1, ..., Q;\ \rho \neq k\right\}.$$

Таким образом, решение вопроса об улучшаемости, оптимальности по Парето многоцелевого решения $x^0 \in X$ по критерию Парето сводится к существованию (отсутствию) вектора $\gamma \in \Gamma$, для которого выполнены неравенства утверждения 1.

Утверждение 4. Для того чтобы решение $y \in X$ было улучшаемо (оптимально по Парето), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись (были несовместны) неравенства

$$\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right) \leqslant \max_{\gamma \in \Gamma} \left\{\max_{\mathrm{z}} \min_\rho \left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(z\right)\right) + \gamma_\rho\right] - \gamma_k\right\}, \ (k = 1, ..., Q).$$

Доказательство.
$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)+\gamma_k \leqslant \mu_k\left(f_k\left(y\right)\right)+\gamma_k \leqslant \max\limits_z\left[\mu_k\left(f_k\left(z\right)\right)+\gamma_k\right]=\min\limits_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(z\right)\right)+\gamma_\rho\right] \leqslant$
$\leqslant \max\limits_z \min\limits_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(z\right)\right)+\gamma_\rho\right] \leqslant \max\limits_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max\limits_z \min\limits_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho\left(z\right)\right)+\gamma_\rho\right]\right\}$,

$\left(\mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right)+\gamma_S\right) < \left(\mu_S\left(f_S\left(y\right)\right)+\gamma_S\right) \leqslant \max\limits_{\gamma\in\Gamma}\left\{\min\limits_z \min\limits_\rho\left(\mu_S\left(f_S\left(z\right)\right)+\gamma_\rho\right)\right\}$. для всех $(\rho, k=1,...,Q,\ \rho\neq k)$ или хотя бы одного $S\in\{1,...,Q\}$. Отсюда следует справедливость доказываемых неравенств.

Утверждение 5. Пусть $\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right)$- функция принадлежности $f_k\left(y\right)$, определяемая как в (3). x^0- оптимальное решение улучшаемой задачи

$$\sum_{k=1}^{Q}\gamma_k\to\max$$

$$\mu_k\left(f_k\left(x\right)\right)-\gamma_k\geqslant\lambda^*,\ \ k=1,...,Q,\ \ x\in X,\quad \gamma_k\geqslant 0. \tag{5}$$

Тогда решение $x^0\in X$ Парето – оптимальное решение задачи (1).

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $x^0\in X$ Парето – оптимальное решение (1). Тогда существует такое решение $y\in X$, что $f_k\left(y\right)\leqslant f_k\left(x^0\right)$ при всех $(k=1,...,Q)$ и $f_S\left(y\right)<f_S\left(x^0\right)$ для некоторого $S\in\{1,..,Q\}$.

Так как вектор γ_k, $k=1,...,Q$ положительный и x^0 удовлетворяет следующие равенство:

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)-\gamma_k=\lambda^*,\ \ k=1,...,Q \text{ и } \sum_{k=1}^{Q}\gamma_k=\sum_{k=1}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)-Q\lambda^*.$$

Тем не менее существует $f_k\left(y\right)\leqslant f_k\left(x^0\right)$ при всех $(k=1,...,Q)$ и $f_S\left(y\right)\leqslant f_S\left(x^0\right)$ для некоторого S. Это приводит к следующим неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{Q}\gamma_k=\sum_{k=1}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)-Q\lambda^*=\sum_{\substack{k=1\\k\neq S}}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)+\mu_S\left(f_S\left(x^0\right)\right)-Q\lambda^*<$$

$$<\sum_{\substack{k=1\\k\neq S}}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(y\right)\right)+\mu_S\left(f_S\left(y\right)\right)-Q\lambda^*.$$

Это нам означает решением (5) $x^0\in X$ не является оптимальным.

Нахождение Парето – оптимального решения (5) при условии (3) сводится к решению следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \mathrm{R}=\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{Q}}\mathrm{c_k}x_k\to\max \\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\leqslant b_k,\ \ k=1,...,Q+m \\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,...,n. \end{cases}.$$

Данную задачу решаем с использованием рекуррентных нейронных сетей.

Для расчета модели рекуррентными нейронными сетями надо перейти к противоположной функции

$$R = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{Q} c_k x_k$$

и в соответствующей таблице записывать значения c_k с противоположным знаком. При подаче на вход сети вектора определяются состояния нейронов, но затем, из-за того, что выходы нейронов имеют обратные связи, на их входы опять поступает новый вектор, и состояния снова изменяются. С рекуррентными сетями связано понятие стабильности [1]. Сеть считается стабильной, если после конечного числа итераций нейроны принимают состояния, которые в дальнейшем не изменяются. При подаче вектора на вход стабильных рекуррентных сетей, вырабатываются выходные сигналы нейронов, которые затем опять поступают на входы, снова генерируя новый вектор состояний, но, по мере роста числа итераций, количество изменений состояний узлов уменьшается, пока сеть не установится в конечное состояние. Сети без обратных связей всегда стабильные, так как при подаче одного вектора на вход, узлы сети только один раз могут изменять свое состояние, вследствие постоянства входов нейронов.

Для решения задач (1)-(2) предложена рекуррентная нейронная сеть [2], которая описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u_k(t)}{\partial t} = -\eta \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k \right) + \lambda c_k \exp\left(-\frac{t}{\tau} \right), \tag{6}$$

где $x_k = f(u_k(t))$, $\quad f(u) = \frac{1}{1+\exp(-\beta u)}$. Как и в сети Хопфильда, здесь используется матрица нейронов размером $n \times n$, но нейроны взаимодействуют не по принципу «каждый с каждым», а по строкам и столбцам.

Разностный вариант этого уравнения имеет вид

$$u_k^{t+1} = u_k^t - \Delta t \cdot \left[\eta \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k \right) - \lambda c_k \exp\left(-\frac{t}{\tau} \right) \right], \tag{7}$$

где Δt - шаг по времени. Параметры Δt, η, λ, τ, β подбираются экспериментально и существенно влияют на скорость достижения решения задачи и качество этого решения.

Для ускорения решения системы уравнений (7) предложен принцип «Winner takes all» [3]:

1. Порождается матрица $\|x_k^0\|$ случайных значений $x_k^0 \in [0, 1]$.
2. Итерация (7) продолжаются до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k \leqslant \varepsilon,$$

где ε - заданная точность выполнения ограничений (2).

Шаги 1 и 2 повторяются.

Одним из основных свойств искусственных нейронных сетей является надежность нейросетевых моделей. Это свойство может позволить строить прикладные нейросетевые системы для областей, где требуется высокая надежность.

Не менее важным качеством является обучаемость нейронных сетей. Благодаря этому свойству, они могут не только распознавать образы, поступающие на их вход, но, с помощью соответствующих процедур, настраиваться таким образом, чтобы проводить по возможности более корректное распознавание. Таким образом, нейронные сети могут функционировать в двух режимах или фазах: в режиме обучения и режиме распознавания.

Способность нейронных сетей к обобщению – также весьма важное свойство. Благодаря этому свойству сети способны не только воспроизводить отображения, задаваемые в ходе обучения, но и строить новые. Это повышает «компетентность» систем, основанных на нейронных сетях.

4 Вычислительный эксперимент

Рассмотрим пример, взятый из [10]. Рассматривается многокритериальная задача с нечеткими целями

$$\begin{cases} f_1(x) = 4x_1 - 6x_2 \to \min \\ f_2(x) = -2x_1 - x_2 \to \min \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 \leqslant 8 \end{cases} \tag{8}$$

$$g_1 = 20; g_2 = -9,\ t_1 = 2; t_2 = 2,$$

где g_1, g_2, t_1, t_2 - параметры функции принадлежности нечеткого множества $\tilde{g}_k$. Сформируем функции принадлежности для нечетких целей

$$\mu_1\left(f_1(x)\right) = \begin{cases} \frac{22-f_1(x)}{2} & f_1(x) \leqslant 22 \\ 0 & f_1(x) \geqslant 22 \end{cases}$$

$$\mu_1\left(f_1(x)\right) = \begin{cases} \frac{-7-f_2(x)}{2} & f_1(x) \leqslant -7 \\ 0 & f_1(x) \geqslant -7 \end{cases}$$

Тогда модель (7) примет следующий вид

$$\begin{cases} \alpha \to \max \\ \frac{1}{2}\left(22 - (4x_1 - 6x_2)\right) \geqslant \lambda \\ \frac{1}{2}\left(-7 - (-2x_1 - x_2)\right) \geqslant \lambda \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 \leqslant 8 \end{cases}$$

Решением этой модели являются

$$x^* = (x_1^*,\ x_2^*) = (4,5;\ 0)\,,\ \alpha^* = 1,$$

$$f_1\left(x^*\right) = 18, f_2\left(x^*\right) = -9.$$

Рассмотрим существование вектора $\gamma = (\gamma_1,\ \gamma_2)$, который возможно улучшает решение x^*.

Для этого решаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \to \max \\ 4x_1 - 6x_2 + 2\gamma_1 \leqslant 20 \\ -2x_1 - x_2 + 2\gamma_2 \leqslant -9 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 \leqslant 8 \end{cases} \tag{9}$$

Решением задачи (9) является

$$x^{**} = (x_1^{**},\ \ x_2^{**}) = (2;5).$$

Оптимальными значениями параметров γ_1, γ_2 и целевых функций являются

$$\gamma_1 = 21; \quad \gamma_2 = 0; \quad f_1(x^{**}) = -22; \quad f_2(x^{**}) = -9.$$

Таким образом, существует вектор $\gamma = (\gamma_1,\ \gamma_2)$, при котором Парето-оптимальное решение улучшаемо, т.е.

$$f_1\left(x^{**}\right) < f_1\left(x^{*}\right),$$

$$f_2\left(x^{**}\right) = f_2\left(x^{*}\right).$$

5 Заключение

Системный анализ проблемы построения нечетких моделей задач классификации, оценки и прогнозирования в слабоформализованных системах обосновал актуальность и необходимость разработки методов их решения.

На основе математического анализа показано, что важное значение имеет обеспечение адекватности модели, то есть то, насколько правильно использована текущая информация о предмете исследования в процессе моделирования.

Нахождение Парето-оптимального решения $x^0 \in R^n$ многокритериальной задачи или его улучшаемости сводится к установлению отсутствия или существования вектора $\gamma \in \Gamma$, для которого выполнены неравенства $\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) \leqslant c^k \ \ \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) < c^S$. Алгоритм построения нечеткой модели интеллектуального анализа состояния процессов позволяет решать задачи классификации, оценки и прогнозирования состояний процессов в условиях слабоформализованности и неопределенности информации об этих процессах.

Литература

[1] *Орловский С. А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. -М.: Наука, 1981. 203 с.

[2] *Баева Н. Б., Бондаренко Ю. В.* Основы теории и вычислительные схемы векторной оптимизации. -Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009. 95 с.

[3] *Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К.* Задачи линейной оптимизации с неточными данными. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований: Регуляр. и хаот. динамика, 2008. 286 с.

[4] *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования. -М.:БИНОМ. Лаб.знаний, 2005. 416 с.

[5] *Малышев В. А., Пиявский Б. С., Пиявский С. А.* Метод принятия решений в условиях многообразия способов учета неопределенностей // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2010.- №1. -С. 46–61.

[6] *Ногин В. Д.* Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения // Журн. вычислит, математики и мат. физики., 2003. Т.43. -№11. С. 1666–1676.

[7] *Zadeh L. A.* Fuzzy Sets // Information and Control, 1965. Vol.8.- №3. P. 338–353.

[8] *Tanaka Hideo, Asai Kiyaii* Fuzzy linear programming based on fuzzy functions // Bull. Univ. Osaka Prefect, 1980. Vol.29. -№2. P. 113–125.

[9] *Ротштейн А. П.* Нечеткий многокритериальный анализ вариантов с применением парных сравнений // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2001. -№3. P. 150–154.

[10] *Вильямс Н. Н.* Параметрическое программирование в экономике. -М. 1976. 96 с.

[11] *Negoita C.* The current interest in fuzzy optimization // Fuzzy Sets and Systems, 1981. Vol.6, №3. P. 261–269.

[12] *Hannan E.* Linear programming with multiple fuzzy goals // Fuzzy Sets and Systems, 1981. Vol.6, №3. P. 235–260.

[13] *Мухамедиева Д. Т.* Разработка нечетких моделей задач принятия решений. Издательство «Palmarium Academic Publishing». AV Akademikerverlag GmbH Co.KG Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrucken, Germany. 2014. 190 с.

[14] *Мухамедиева Д. Т.* Применение методов мягких вычислений в слабоформализуемых системах. Издательство «Palmarium Academic Publishing». AV Akademikerverlag GmbH Co.KG Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrucken, Germany. 2014. 181 с.

[15] *Мухамедиева Д. Т.* Интеллектуальный анализ нечеткого решения некорректных задач. Издательство «Palmarium Academic Publishing». AV Akademikerverlag GmbH Co.KG Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrucken, Germany. 2017. 327 с.

Поступила в редакцию 18.12.2018

UDC 316.51

METHOD FOR SOLVING A MULTICRITERIA PROBLEM OF OPTIMIZATION BASED ON THE SEARCH FOR COMPROMISE SOLUTIONS*

Muhamediyeva D.T., Niyozmatova N.A.

dilnoz134@rambler.ru; n_nilufar@mail.ru

Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies

This paper presents one of the approaches to solving a multicriteria optimization problem with a fuzzy goal. The need to use qualitative information is recognized by many researchers, and various ways of formalizing and solving this problem have been proposed. To describe the particular criteria and limitations, they were offered the use of desirability functions. The latter take values that continuously increase from 0 to 1 when the corresponding quality parameters

*The research was supported by Agency for Science and Technology of the Republic of Uzbekistan (grant BV-V-F011).

change from least to the most desirable values. The specific type of desirability functions is given by the decision maker (DM), based on his subjective perceptions. The issues of building fuzzy models of classification, estimation and forecasting are expressed as a multi-objective optimization problem with four objective functions. The concepts of the Pareto-optimal solution and the best compromise solution for the level of a multi-criteria task are introduced. Formulated and proved theorems that establish the relationship between them. A method for solving a multicriteria problem based on the search for compromise solutions of a level is proposed. Proper use of current information about the object in the modeling process, that is, determining the adequacy of the model is important. In this regard, the main problems of the development of models of poorly formalized processes are formulated.

Keywords: The theory of fuzzy sets, fuzzy models, multicriteria optimization, knowledge base, membership function, decision making, evaluation, forecast

Citation: Muhamediyeva D.T., Niyozmatova N.A. 2019. Method for solving a multicriteria problem of optimization based on the search for compromise solutions. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(19): 109–119.