УДК 519.2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА МЕТОДОМ АСИНХРОННЫХ ИТЕРАЦИЙ

[1]***Расулов А. С.***, [2]***Бакоев М. Т.***,[3]***Ахмедова Х. И.***
[1]asrasulov@gmail.com; [2]matyoqub.bakoyev@gmail.com; [3]xolisa0110@mail.ru
Университет мировой экономики и дипломатии, г.Ташкент, прос. Мустакиллик, 54.

В работе рассматриваются асинхронные итерационные методы. Как известно в многопроцессорных компьютерах применение параллельных методов заметно снижает производительность и эффективность вычислительных средств. Асинхронные методы позволяют уменьшить время обмена информации между процессорами в многопроцессорных ЭВМ и тем самым повысить производительность и эффективность вычислений. Результаты вычислительных экспериментов для рассмотренной задачи показывают эффективность асинхронных алгоритмов при применении в многопроцессорных компьютерах.

Ключевые слова: асинхронный итерационный метод, параллельные вычисления, уравнения Гельмгольца.

Цитирование: *Расулов А. С., Бакоев М. Т., Ахмедова Х. И.* Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца методом асинхронных итераций // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 4(16). — С. 106–112.

1 Постановка задачи

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_\chi$– банаховы пространства, χ-целое число, причем $\chi > 1$. Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, ...y_\chi) \\ y_2 &= f_2(y_1, ...y_\chi) \\ &\vdots \\ y_\chi &= f_\chi(y_1, ...y_\chi) \end{aligned} \tag{1}$$

где $f_i : X \to X_i$.

Кратко систему (1) запишем в виде

$$y = F(y), \quad y \in X \tag{2}$$

где нелинейный оператор F определен на X со значениями в X_i . В параллельных вычислениях [1] обычно применяется метод случайных-хаотических итераций. Сначала дадим описание метода хаотических итераций.

2 Метод хаотических итераций

Пусть в Банаховом пространстве X требуется решит операторное уравнение (2). Для простоты будем считать, что область определения оператора F совпадает с X, что несущественно для предлагаемого метода, однако позволяет избежать дополнительных требований.

Пусть J является непустым подмножеством $\{1, 2, \ldots, \chi\}$. Определим оператор F_j на следующим образом:

$$\forall y \in X : y = (y_1, \ldots, y_\chi) \to F_j = (z_1, \ldots, z_\chi),$$

где

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{если} i \notin J \\ f_i(y_1, ..., y_\chi) & \text{если} : i \in J \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что при $J = \{1, 2, ..., \chi\}$, $F_j = F$, через y_i , будем обозначать элемент пространства X_i.

Пусть теперь $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ -последовательность непустых подмножеств множества которую в теории асинхронных итерационных методов, называют хаотической (случайный) последовательностью множеств. Для приближенного решения операторного уравнения (2) при заданном начальном $y(0) \in X$ будем строить последовательность итераций $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ по правилу

$$y(n+1) = F_{J_{n+1}}(y(n)), n = 0, 1, 2, ...) \tag{4}$$

Метод, согласно которому последовательность итераций строится по правилу (3), называется методом последовательно-параллельных хаотических (случайных) итераций (ППХИ). Так как оператор F определен на всем X, то все итерации, строящиеся по методу ППХИ, будут принадлежать X. Для удобства запишем метод (3) в развернутом виде

$$y_i(n+1) = \begin{cases} y_i(n), & \text{если} \quad i \notin J \\ f_i(y_1, ..., y_\chi) & \text{если} : i \in J, n = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{5}$$

Метод (5), который далее будем называть методом хаотических итераций, является обобщением последовательных итерационных методов, что определяется видом хаотической последовательности множеств. Если $J_n = J = \{1, 2, ..., \chi\}$, то все компоненты вектора итерации обновляются одновременно. В результате приходим к методу простой итерации $y(n+1) = F(y(n)), n = 0, 1, 2, ...$. Если же, $J_n = n(mod\chi)$, то компоненты вектора итерации изменяются поочередно, причем при вычислении очередной компоненты используются уже вычисленные предыдущие. Обозначив

$$z(n) = (y_1(n), ..., y_\chi(n + \chi)),$$

приходим к итерации по методу Гаусса — Зейделя.

Основным отличием и характерной особенностью метода хаотических итераций является произвольный (случайный) порядок обновления компонент вектора итерации, что и позволило получить параллельный асинхронный метод. Но так как хаотическая последовательность множеств произвольна (случайна), то порядок обновления метода хаотических итераций в общем случае может быть, произвольно большим.

3 Метод асинхронных итераций

Обобщением метода хаотических итераций является метод асинхронных итераций, впервые введенный в работе [2]. Как и раньше, находим решение нелинейного операторного уравнения $y = F(y)$ в прямом произведении банаховых пространств

$X = \prod_{i=1}^{\chi} X_i$. Согласно методу асинхронных итераций для хаотической последовательности множеств $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность итераций $\{y_i(n)\}_{n=1}^{\infty}$ строится для заданного $y(0)$ по правилу:

$$y_i(n) = \begin{cases} y_i(n-1), & \text{если} \quad i \notin J_n \\ f_i(y_1(S_1(n)), ..., y_\chi(S_\chi(n))) & \text{если} : i \in J_n, n = 0, 1, 2, ... \end{cases}, \tag{6}$$

здесь y_i — компонента вектора y из X_i, а $\{S_i(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, ..., \chi$ -последовательности целых неотрицательных чисел, удовлетворяющие условиям

$$S_i(n) \leqslant n - 1 \tag{7}$$

$$S_i(n) \to \infty, n \to \infty; i = 1, 2, ..., \chi \tag{8}$$

Величины $S_i(n), i = 1, 2, ..., \chi$, называются запаздыванием и позволяют при вычислении вектора текущей итерации использовать произвольные компоненты векторов предыдущих итераций. При этом должно вычисляться лишь условие (7), которое требует, чтобы используемые при вычислениях итераций известные значения обновлялись.

Метод асинхронных итераций является обобщением метода хаотических итераций. При $S_i(n) = n-1$ приводит к методу хаотических итераций. Далее покажем,что асинхронные итерационные методы типа Ньютона-Канторовича могут быть построены на основе обычного асинхронного итерационного метода. Это исключает необходимость рассмотрения асинхронных методов с памятью. Для оценки скорости сходимости последовательности итераций обычно используется величина

$$R = \lim_{n \vec{\to} \infty} \frac{-\| \ln(y(n) - \xi\|_0}{n}$$

где ξ-неподвижная точка оператор F , а $\|y\|_0 = \max_{i=1,...,\chi} \|y_i\|_i$. Удобнее всего основание логарифма в выберать равным десяти. Тогда величина равна асимптотическому числу шагов, необходимому для уменьшения погрешности в 10 раз.

Под эффективностью итерационного метода обычно понимается величина

$$\zeta = \lim_{n \vec{\to} \infty} \frac{-\| \ln(y(n) - \xi\|_0}{c_n}$$

где c_n характеризует затраты при вычислении n итераций. Обычно в качестве c_n выбирается величина, пропорциональная либо количеству арифметических операций, необходимых для вычисления первых n итераций, либо времени, необходимому ЭВМ для вычисления n итераций.

Величина $\frac{c_n}{n}$ определяет значение цены итерационного шага. Если при устремлении n к бесконечности $\frac{c_n}{n} \to a$, где a конечно, то $R = a\zeta$. В случае метода асинхронных итераций величину c_n можно определить следующим образом

$$c_n = \frac{|J_1| + ... + |J_n|}{n}$$

где $|J_i|$ равно количеству элементов множества J_i. Далее можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть оператор $F : X \to X$ является р-сжимающим на X с матрицей сжатия L, хаотическая последовательность множеств имеет максимальный осадок. Тогда для любого $y(0) \in X$ последовательность итераций, построенных по асинхронному итерационному методу (5), сходится к единственной неподвижной точке оператора F в X.*

Доказательство: Из р- сжимаемости оператора F на X следует существование единственной неподвижной точка ξ. Не ограничивая общности операторное уравнение

$$F(y) = 0 \tag{9}$$

Допустим неподвижной точкой является $\xi = 0$. Для того достаточно вместо оператора рассматривать оператор $F(x-\xi)-\xi$. Так как оператор F является р-сжимающим на X, то $\forall y, z \in X : p(F(y) - F(z)) \leqslant Lp(y - z)$. Положив в последнем неравенстве $z = 0$, получим $\forall y, \in X : p(F(y)) \leqslant Lp(y)$. Так как по условию теоремы L является матрицей сжатия, то существуют положительный вектор $\upsilon \in R^{\chi}$ и положительный скаляр $\theta \in [0, 1)$ удовлетворяющие неравенству $L\upsilon \leqslant \theta\upsilon$. Пусть $y(0)$–начальное приближение из X . Учитывая, что компоненты вектора υ положительны, найдем такое число $\alpha > 0$, чтобы выполнялось неравенство $p(y(n)) \leqslant \alpha\upsilon$ что можно построить такую последовательность $\{n_q\}_{q=0}^{\infty}$ что

$$p(y(n)) \leqslant \alpha\theta^q\upsilon, n \geqslant n_q$$

Далее для последовательности итераций можно получит следующую оценку

$$p(y(n) - \xi) \leqslant \alpha\theta^q\upsilon, n \geqslant n_q$$

Величина q определяет фактически количество макроитераций, которые содержатся в $\{y(m)\}_{m=1}^{n_q}$.

Если использовать норму $\|y\|_\upsilon = \max\limits_{i=1,\dots,\chi} \frac{\|y_i\|_i}{\upsilon_i}$ где $\upsilon_1, \dots, \upsilon_\chi$ - компоненты вектора υ то получим

$$\|y(n) - \xi\|_\upsilon \leqslant \alpha\theta^q, n \geqslant n_q \tag{10}$$

Так как постоянная α-величина произвольная, которая должна лишь удовлетворять неравенству $p(y(0)) \leqslant \alpha\theta^q, n \geqslant n_q$ то выберем $\alpha = \|y(0) - \xi\|_\upsilon$ Тогда

$$\frac{\|y(n) - \xi\|_\upsilon}{\|y(0) - \xi\|_\upsilon} \leqslant \theta^q, n \geqslant n_q \tag{11}$$

q_n-определяет максимальное число макроитераций в последовательности итераций $\{y_n\}_{n=0}^{n_q}$ В результате из 10 получим

$$\|y(n) - \xi\|_\upsilon \leqslant \alpha\theta^{q_n}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Значит, скорость сходимости последовательности асинхронных итераций не хуже, чем скорость сходимости последовательности θ^{q_n} ,при $n \to \infty$, Из уравнения 11 получим

$$\|y(n) - \xi\|_\upsilon \leqslant \alpha\theta^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

что и доказывает теорему.

Для оценки скорости сходимости и эффективности получим следущие оценки см. [1],

$$R \geqslant - \lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{n} \ln\theta \quad , \zeta \geqslant - \lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{n} \ln\theta \tag{12}$$

Хорошо известно, что число может быть выбрано сколь угодно близким к матрица сжатия оператора L. Это следует из положительности и неприводимости матрицы L. Поэтому в формулах можно заменить на $\rho(L)$

$$R \geqslant -\ln \rho(L), \quad \zeta \geqslant -\theta \ln \rho(L).$$

В случае метод простой итерации запишем

$$R \geqslant -\lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{n} \ln \rho(L), \quad \zeta \geqslant -\lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{n} \ln \rho(L).$$

Если переписать формулу 12 для метода простой итерации и

$$\zeta_0 = \frac{-\log \|y(n) - \xi\|_0}{c_{n_0}}$$

для асинхронного метода

$$\zeta_{\text{a}} = \frac{-\log \|y(n) - \xi\|_0}{c_{n_a}}$$

тогда сравненение эффективности двух методов [3], [4] будет в следующем виде

$$\frac{\zeta_0}{\zeta_a} = \frac{c_{n_a}}{c_{n_0}}$$

где c_{n_0} - количество операций для простого и c_{n_a} -для асинхронной итераций, отсюда $\zeta_a = \frac{c_{n_a}}{c_{n_0}} \zeta_0$, здесь $c_{n_0} \geqslant c_{n_a}$, значить $\frac{c_{n_a}}{c_{n_0}} \geqslant 1$. Для сравнения времены вычисления можно использовать следующее соотношения $c_{n_0} t = T_0, c_{n_a} t = T_a$, Здесь t- время для одной операции, T_0, T_a - соответственно среднее время для паралеллный и асинхронных итераций. Тогда $\zeta_a = \frac{T_0}{T_a} \zeta_0$. В нашем случае если условной единицей для нашего компьютера взять $\zeta_0 = 1$, то теоретический вычисленный эффективность асинхронного метода будеть $\zeta_{\text{a}} = 2$,то есть эффективность асинхронного метода теоретически два раза лучше чем обычный паралеллный метод.

4 Вычислительный эксперимент

Для сравнения в качестве примера рассмотрим уравнения Гелмьголца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + u = x^2 + y^2$$

Здесь $u = u(x, y) 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$, и граничные условия

$$y_i(n+1) = \begin{cases} u(0, y) = y^2 \\ u(1, 0) = 1 + y^2 \\ u(x, 0) = x^2 \\ u(x, 1) = 1 + x^2 \end{cases}$$

Точное решения $u(x, y) = x^2 + y^2$. Если применять конечно разностный метод и привести к системе линейных алгебраических уравнений вида $u = Au$ получаем в нашем случае матрицу порядка (1520x1520). Применяем для полученной линейной системы уравнений обычный паралеллный и асинхронный итерационный метод. Результаты вычислителного эксперимента (см.таблицу) показывает что теоретический вычисленный эффективность в среднем 2 раза подтверждается .

№	Колич. процессоров	T_a	T_0	Эффективность
1	2	5365	9030	1.6831314072
2	3	4608	9163	1.9884982638
3	4	4473	9101	2.0346523585
4	5	4337	9151	2.1099838598
5	1	9034	9035	1.0001106929
6	2	4963	9307	1.8752770501
7	2	5092	9020	1.7714061272

5 Заключение

Резултаты вычислителного экперимента показывает (см.рис.1) что если количество процессоров меняется то среднее значениие эффектиности тоже меняется.

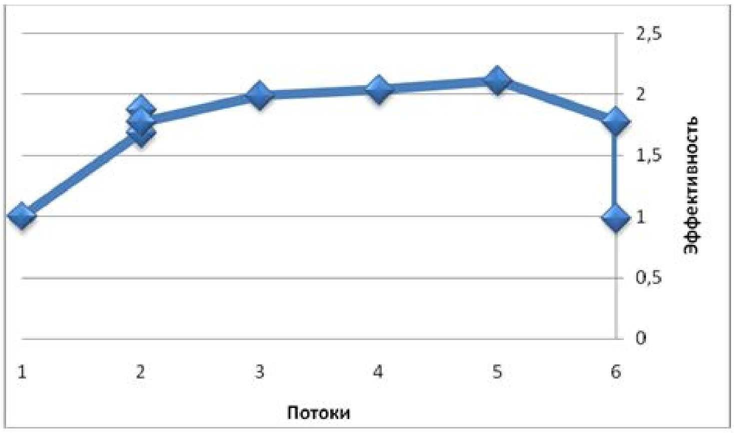

Рис. 1 Зависимость эффективности от количества процессоров

Из графика можно видет что сначало с увличением процессоров эффективность увеличивается, затем после определённого количество процессоров эффективност уменшается. Это факт указывает что резултать зависит от параметров компьтера а также состояния внутреннего обмена между процессорами что требует дополнителных исследований в этом направление.

Литература

[1] *Нестеренко Б. Б., Марчук В. А.* Основы асинхронных методов параллельных вычислений. — Киев: Наукова думка, 1989.

[2] *Baudet G.M.,* Asynchronouns Iterative Methods for Multiprocessors J.Assoc.Comput. Mach.-1978.-25, N 2.P.226-244.

[3] *Rasulov A. S., Bakoev M.T.* T Probabilistic approach to the asynchronous iteration, Journal of applied mathematics and physics, PracTEX J., 2014, vol.2, N-1, p. 32-41. URL: http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2014.21006.

[4] *Ермаков С.М., Сипин А.С.,* Метод Монте Карло и параметрическая разделимость алгоритмов. Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014., 248 с.

Поступила в редакцию 09.07.2018

UDC 519.2

APPLICATION OF ASYNCHRONOUS ITERATIONS TO DIRICHLET PROBLEM FOR HELMHOLTZ EQUATIONS

[1]***Rasulov A. S.***, [2]***Bakoyev M. T.***, [3]***Axmedova X. I.***
[1]`asrasulov@gmail.com`; [2]`matyoqub.bakoyev@gmail.com`; [3]`xolisa0110@mail.ru`
UWED, 54 Mustakillik Ave., Tashkent.

In this work we will consider asynchronous iteration algorithms. As is well known in multiprocessor computers the parallel application of iterative methods often shows poor scaling and less than optimal parallel efficiency. The ordinary iterative asynchronous method often has much better efficiency as they almost never need to wait to communicate between possessors. The result of our numerical experiments shows better efficiency of asynchronous iterative processes for considered problem.

Keywords: asynchronous iterations methods, parallel algorithms, Helmholtz equation

Citation: Rasulov A. S., Bakoyev M. T., Axmedova X. I. 2018. Application of asynchronous iterations to Dirichlet problem for Helmholtz equations. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 4(16): 106–112.

References

[1] B.B. Nesterenko, V.A.Marchuk *Osnovi asinxronnix metedov parallelnyx vichisleny*. Kiyev Nauka Dumka ,1989.

[2] Baudet G.M. *Asynchronouns Iterative Methods for Multiprocessors J.Assoc.Comput. Mach.-1978.-25, N 2.P.226-244.*

[3] Rasulov A. S., Bakoev M.T. *T Probabilistic approach to the asynchronous iteration, Journal of applied mathematics and physics, PracTEX J.*, 2014, vol.2, N-1, p. 32-41. URL: `http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2014.21006`.

[4] Ermakov S.M., Sipin A.S., *Metod Monte Karlo i parametricheskaya razdelimost algoritmov* Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2014., 248 s.

Received 09.07.2018