УДК 519.6

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ИОНООБМЕННОГО ФИЛЬТРОВАНИЯ СУСПЕНЗИИ И ИХ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

[1]***Равшанов Н.***, [2]***Саидов У.***

ravshanzade-09@mail.ru; usaidov@umail.uz

[1]Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий при ТУИТ имени Мухаммада ал-Хорезми, Ташкент, Узбекистан;

[2]Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, Самарканд, Узбекистан.

В статье рассматривается проблема, связанная с охрана окружающей среды, то есть зашита подземных вод от источников загрязнения способом ионообменного фильтрования ТПФИЖ жидких растворов от тяжелых ионных соединение выбрасываемые из объектов производства.

В работе с целью правильного выбора стратегию решения задач проанализирован научно-исследовательские наработки выполнение за последние 5-10 лет связанные с проблемой математического моделирования нестационарных технологических процессов фильтрования суспензии с помощью механические и ионитные фильтры используемых в производства приготовления и переработка продуктов общественного назначения и других.

Для проведения комплексного исследования указанных выше процессов в работе приведена математический инструмент - математическая модель и его приближенно-аналитическое решение, описывающий системой нелинейной дифференциальной уравнений в частных производных.

В статье для численного интегрирования задача с целью подавления мелкомасштабное колебание добавлен член «искусственной вязкости» с некоторым числовым параметром – коэффициентом «искусственной вязкости», а нелинейные члены уравнении линеаризуется квазилинеаризационным методом Беллман-Калаба.

Так как при фильтрования суспензии происходит заполнение пор фильтра гель-частицами в математическая постановка задача учитывается влияние ионного обмена на пористость и проницаемость ионитного фильтра и приведен закон его изменения.

Ключевые слова: математическая модель, приближенно-аналитическое решение, численный алгоритм, технологический процесс, фильтрования, суспензия, вычислительный эксперимент.

Цитирование: *Равшанов Н., Саидов У.* Модельная задача технологического процесса ионообменного фильтрования суспензии и их численно-аналитическое решение // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2018. — № 6(18). — С. 101–113.

1 Введение

Фильтрование жидких растворов с помощью фильтровальной колонки с учетом образования слоя осадков, закупоривания пор фильтра, перепада давления в колонке является сложным нестационарным технологическим процессом.

Фильтрование вязких жидкостей от примесных и технологических отходов - один из основных этапов в производстве масложировых, фармацевтических, машиностроительных, пищевых и д.р. продуктов и является актуальной проблемой.

Технологический процесс фильтрования жидкостей (ТПФИЖ) недостаточно изучен с теоретической и экспериментальной точек зрения. Поэтому проблема состоит в исследовании, прогнозировании и управлении процессом на основе его математического и программного обеспечения.

При ТПФИЖ используются различные по физико-механическим свойствам фильтры и фильтровальные перегородки. Работоспособность фильтрующего оборудования во многом определяется фильтрующими перегородками, с помощью которых осуществляется отделение частиц твердой фазы от жидкости или газа.

Проведенные экспериментальные исследования показали, что на фильтрование жидких растворов воздействует множество параметров с различными удельными значениями. В связи с этим необходимо всесторонне исследовать данный процесс с помощью математических моделей и проведением ВЭ на ЭВМ и выявить условия наиболее полного фильтрования жидкостей от примесей и отходов.

За последние годы проведены научные исследования по ТПФИЖ и получены значительные теоретические и практические результаты. Эти задачи рассмотрены и решались в работах ученых, в частности, Jing Wang, Zhang J., Zhihui Yu., XRemy Yu., Dufty J. W., Duygu Kocaefe, Carlos Andre, Gitisa Vitaly, Andrii Safonyk, Шехтман Ю. М., Жужиков И. И., Федоткин И. М., Нигматулин Р. И., Волков Ю. П., Ольшанский В. П., Харченко Ф. М., Шацкий В. П., Абуталиев Ф. Б., Юсупбеков Н. Р., Ризаев Н. У., Файзуллаев Д. Ф., Атаулаев Х. Х., Умаров О. У., Рахимов М. Я. Они внесли большой вклад в разработку математических моделей и численных алгоритмов для решения выше упомянутых задач.

В частности, в работе [1; с.7-9, 2; с.47-58] представлены и решены вопросы учета обратного влияния технологических характеристик процесса (концентрации загрязнения жидкости и осадка) и характеристик среды (коэффициентов пористости, фильтрации, диффузии, массообмена и др.) на примере очистки жидкости в магнитных и сорбционных фильтрах. Представлен алгоритм численно-асимптотического приближенного решения соответствующих задач модели, которые описываются системой нелинейных сингулярных дифференциальных уравнений типа «Конвекция-диффузия-массообмен».

Результаты исследования сложных механизмов осаждения частиц в свече-фильтре приводятся в [2, с.2776-2779]. С целью изучения процесса фильтрования и его моделирования авторами проведены фильтрационные эксперименты с подходящей частицей масляной суспензии в экспериментальном фильтре. В то время как некоторая глубина фильтрации происходит в начале срока службы свечи фильтра, блокирование и кейк-слой фильтрации являются основными механизмами, ответственными за засорение фильтра.

В исследовании [3, с.78-82] разработана феноменологическая модель глубоководной инфильтрации. Предложенная математическая модель комбинируется с уравнением адъективной дисперсии и нелинейным уравнением кинетики рассматриваемого технологического процесса (ТП). Математическая модель (ММ) решается численно с использованием явной конечно-разностной схемы. Полученные результаты сопоставлены с натурными экспериментами на установках «EPA», произведенных израильской компанией «Mekorot».

Авторами статьи [4, с.143-145] рассматривается задача фильтрации двухчастичной суспензии через пористую среду. Предлагается модель, основанная на законах сохранения массы для частиц и для жидкости, а также локальных законах захвата частиц, описываемых кинетическими уравнениями. В отличие от известной модели для однотипных частиц, данная модель позволяет учесть различия в физических свойствах частиц (например, их размер).

Уравнения, описывающие течения слабосжимаемой жидкости в слабодеформируемом пористом скелете при нелинейном законе фильтрации с предельным (начальным) градиентом давления, проанализированы в работах [5; с.132-137, 16; с.44-53] и указан ряд решений, выражающихся в элементарных функциях.

Теоретические основы очистки малоконцентрированных суспензий методом фильтрования, имеющие широкое применение в технологии очистки воды питьевого назначения, рассмотрены в работе [6; с.106-112, 48; с.1-7]. Практическим приложением теоретических основ фильтрования является метод технологического моделирования процесса для решения задачи улучшения работы фильтровальных сооружений на водоочистной станции г. Астаны. Приведены результаты исследований по определению некоторых технологических параметров на модульной фильтровальной установке.

В работах [7-10; с.27-31, 29; с.259-284, 73; с.79-81;] с помощью созданной математической модели объекта исследован процесс фильтрования жидкостей через пористые среды при восстановлении водных растворов. Авторами проанализированы и устранены основные недостатки классической модели Шехтмана, которая не учитывает существование состояния предельного насыщения загрузки осадком.

В частности в работе Monteiro P. J., Rycroft Ch. H. и Barenblatt G. I. [11] разработана ММ фильтрация жидкости в нано-пористых породах. При выводе модели процесса предполагается, что фильтрационный слой состоит из двух компонентов: трещиновато-пористая среда и специфические органические включения, состоящие из керогена, в основу которая положена гипотеза о том, что проницаемость включений существенно зависит от градиента давления.

В статье [12, с.1270-12-77] разработана обобщённая модель технологического процесса адсорбции раствора сверхкритического углекислого газа на активизированном углероде. Адсорбционные кривые получены на лабораторной установке, что позволило усовершенствовать математический аппарат объекта исследования. Модель процесса была разработана с помощью уравнения сохранения баланса массы.

В статье [13, с. 331-344] была разработана интегрированная ММ процесса ионообменного фильтрования для очистки воды, позволяющий, оценит эффективности регенерации смолы для оценки и совершенствования ионообменной технологии. Разработанная интегрированная модель было подтверждено с экспериментальными данными. В работе воздействие безразмерных групп (т.е. число Пекле, диффузионный модуль упругости, число Байот) на ионном кривом обмене прорыв были проанализированы с использованием этой модели. Кроме того, интегральная модель была использована, для оптимизации частоту регенерации, чтобы улучшить общую производительность ионного обмена. На основе проведенных исследованиях утверждается, что интегральная модель может быть полезным инструментом для дальнейших исследований в области ионообменной технологии.

Согласно [14-19; с. 255—265; 100-105; 39-42; 85-94; 25-36], для очистки прядильных растворов в химической промышленности применяется процесс трехкратного фильтрования ионизированной суспензии через пористые перегородки фильтра. Например, очистка питьевой воды от гель-частиц и тяжелых ионов производится путем ее фильтрования через многослойные фильтры, имеющие различные пористости и проницаемости. Для исследования и прогнозирования, а также определения диапазонов изменения параметров ТП разработана ММ, численный алгоритм и программное средство для проведения расчетов на ЭВМ.

В работе [20, с. 66-68] приводится ММ процесса фильтрования в виде обобщенного дифференциального уравнения, позволяющий определить падения давления по толщине фильтра и изменения пористости слоя.

В работах [21-22; с. 45-56; 34-39] рассмотрены кинетика извлечения биологически активных веществ из лекарственного растительного сырья различными способами экстракции и описания всех стадий сорбционного концентрирования в проточных системах. В статях анализа предложено использовать систему уравнений, состоящую из уравнений материального баланса, массопереноса и равновесного распределения микрокомпонента. Как считают авторы описание стадии сорбции позволяет рассчитать распределение микрокомпонента по длине колонки по окончании сорбции и использовать это распределение в качестве начального условия при описании стадии десорбции. Разработаны схема численного решения этих систем уравнений в среде `Comsol` и схема итерационного поиска параметров уравнений модели по экспериментальным данным, основанная на минимизации расхождения между теоретическими и экспериментальными кривыми. Разработана процедура оценки доверительных интервалов физико-химических параметров модели по дисперсии экспериментальных данных.

Работе [23, с. 23-33] рассмотрена модель гидромеханического процесса фильтрования полидисперсной суспензии с учетом закупорки пор, вызванной прохождением частиц дисперсной фазы через пористую перегородку.

Работе [24, с. 96-104] рассмотрена обратная задача для одной ММ неравновесной динамики сорбции с внутридиффузионной кинетикой в случае, когда кинетический коэффициент зависит от концентрации. Задача состоит в одновременном определении изотермы сорбции и кинетического коэффициента по двум выходным динамическим кривым, полученным из двух экспериментов. Предложено два метода решения этой обратной задачи. Эффективность предложенных методов исследуется методами вычислительного эксперимента.

В работе [25, с. 895-899] предложено кинетическое уравнение модернизированной модели Томаса, адекватно описывающее зависимость степени извлечения компонента от продолжительности контакта раствора со слоем ионообменника, учитывающее влияние на динамику процесса диффузионных сопротивлений в каналах слоя и зернах ионообменника в колонне с неподвижной загрузкой. Показана возможность использования модели одномерного капиллярного течения для оценки диффузионного сопротивления при движении жидкости в каналах слоя ионообменника. Проверено согласование расчетных и экспериментальных выходных кривых сорбции на сильноосновном катионообменнике и полиамфолите.

В работе [26, с. 1816-1819] предложено математическое описание динамики ионообменной сорбции, основанное на использовании внешнедиффузионной модели без учета продольной диффузии. Авторы отмечают, что полученное ими решение позволяет успешно описать ряд экспериментальных кривых сорбции, хотя во многих случаях значителен вклад внутренней диффузии.

В работе [27] приводятся исследования процессов фильтрования через пористые среды при восстановлении водных растворов путем создания математических моделей. Авторами были проанализированы основных недостатков классической модели Шехтмана которого не учитывает существования состояния предельного насыщения загрузки осадком и эти недостатки были устранены.

В работе [28, с. 363-370] исследованы значения параметров ионообменного процесса, реализуемого в блоке умягчения водного раствора при его эксплуатации в составе промышленной установки «EIS-20». Исследование проведено методом математического моделирования. Предложен подход определения температурной зависимости коэффициентов равновесия. Получены оптимальные значения параметров процесса.

Анализ выше указанных работ и проведенные исследование ТПФИЖ показало, что в результате фильтрования суспензии с помощью фильтровальной передородки происходит заполнение пор фильтра гель-частицами в результате чего происходить изменения его состояние со временим [17–19]. Этот эффект приводить к несвоевременное переключение фильтра, роста гидравлического давления в колонке агрегата, уменьшения скорости фильтрования и т.д. Поэтому, при ММ объекта необходимо учитывать влияние этих параметров на изменение пористость и проницаемость ионитного фильтра со временим.

2 Постановка задачи.

Для уточнения основных параметров и адекватности разрабатываемых ММ рассматриваемого ТПФИЖ, численных алгоритмов и отладка программных средств используемых для проведения численных расчетов на ЭВМ, на основе законов гидродинамики и кинетики процесса разработана модельная задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial mn}{\partial t} + \dfrac{\partial Wn}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\chi \dfrac{\partial n}{\partial x}\right) + \dfrac{\chi_b}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} = \beta\left(n - n'\right), \\ N = \dfrac{n'}{a + bn'}. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + W\dfrac{\partial W}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \dfrac{\mu H_0 W}{\rho H k_0 (1-\delta)^2}, \\ \dfrac{\partial m\theta}{\partial t} + \dfrac{\partial W\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial m\alpha}{\partial t} + (1 - m_0)\dfrac{\partial m\delta}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial t} = \lambda\left(\theta - \gamma\delta\right), \quad \theta = \dfrac{\alpha}{1-\delta}, \\ m = m_1 + \delta\left(m_0 - m_1\right), \end{cases} \tag{2}$$

где W – скорость фильтрования; θ – объемная концентрация взвеси в движущей смеси; δ - концентрация взвеси осевшей массы в порах фильтра; α – концентрация частиц, находящихся во взвешенном состоянии; F – площадь фильтра; ρ и μ – плотность и вязкость суспензий; P – давление в колонке агрегата; H_0 – толщина фильтра; k_0 – коэффициент проницаемости фильтра до начала его работы; концентрация n è N – неравновесные концентрации обменивающихся ионов в растворе в единице длины сорбционной колонке; β – эффективная константа обменивающихся ионов; χ – коэффициент продольной диффузии; χ_b – коэффициент бародиффузии; a è b – постоянные изотермы; λ – кинетический коэффициент; n' – концентрация ионов в растворе, находящаяся в равновесии с концентрацией N; γ – коэффициент дисперсии; β – эффективная константа скорости обменивающихся ионов; m_0, m_1 – начальная пористость и пористость осевшей массы.

В системе уравнений (1) выявляется влияние ионного обмена на пористость и проницаемость фильтра при технологии фильтрования суспензии ионитной перегородкой.

Из постановки задачи и первых уравнений системы (2) видно, что она является уравнением гиперболического типа, и при ее численном интегрировании возникает мелкомасштабное колебание, за счет которой происходить накопления ошибок округления и с течением времени ее амплитуда будет расти. Поэтому при численном интегрировании таких уравнений обычно добавляют дополнительный член «искусственной вязкости» с некоторым числовым параметром – коэффициентом искусственной вязкости. Здесь надо подчеркивать, что коэффициент «искусственной вязкости» в каждой конкретной задаче следует подобрать отдельно в ходе проведения вычислительного эксперимента (ВЭ).

Для удобства интегрирования введем безразмерные переменные и вместо системы (2) получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W\frac{\partial W}{\partial x} = -Eu\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{W}{Re_1(1-\delta)^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial m\theta}{\partial t} + \frac{\partial W\theta}{\partial x} + \frac{\partial m\alpha}{\partial t} + (1-m_0)\frac{\partial m\delta}{\partial t} = \frac{\mu_0\alpha_\tau}{x_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \lambda_1(\theta - \gamma\delta). \tag{5}$$

а краевые условия задачи (3) – (5) запишем в виде

$$\begin{cases} W = 1, \;\; \theta = e^{-\lambda\gamma H_0 x}, \;\; \delta = 0, \;\; \text{ïðè } t = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{H_0^3}{Hk_0}\left[(Eu/Re\,) - \dfrac{W}{(1-\delta)^2}\right], \quad \theta = 1, \;\; \text{ïðè } x = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{m(1-m_0)}{W}\delta, \;\; \text{ïðè } x = H_0 \end{cases} \tag{6}$$

где $Re = \dfrac{\rho H_0 u_0}{\mu}$, $Re_1 = \dfrac{\rho H k_0 u_0}{\mu H_0^2}$ – число Рейнольдса, $Eu = \dfrac{\rho_0 H k_0}{H_0 \mu}$ – число Эйлера.

Как указанно выше, в результате фильтрования суспензии с помощью фильтровальной передородки происходит заполнение пор фильтра гель-частицами в результате чего происходить изменения его состояние со временим. Этот эффект приводить к несвоевременное переключение фильтра, роста гидравлического давления в колонке агрегата, уменьшения скорости фильтрования смеси и т.д. Поэтому необходимо учитывать влияние ионного обмена на пористость и проницаемость ионитного фильтра, которых можно определить с помощью следующих формул

$$m = m_1 - \frac{N}{\rho_c}, \tag{7}$$

$$k = A_0 d^2 k_0 \frac{m^3}{(1-m)^2} = \frac{A_1 k_0}{S_0^2}\frac{m^3}{(1-m)^2} \tag{8}$$

где ρ_c – плотность сорбируемого вещества в твердой фазе: d - диаметр гель – частиц в растворе; S_0 – удельная поверхность пористой среды; A_0 и A_1 – постоянные величины.

Тогда вместо уравнения баланса сорбции в системе (1) можно использовать

$$\frac{\partial\left(m_1 - \frac{N}{\rho_c}\right)n}{\partial t} + \frac{\partial W n}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{Pe}\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial n}{\partial x}\right) + \frac{\chi_b}{W_0 n_0 \rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{9}$$

К первому члену этого уравнения применяем метод квазилинеаризации [29] и получим

$$
\begin{aligned}
&\left(m_1-\frac{N^{(S-1)}}{\rho_c}\right)\frac{\partial n}{\partial t}\;+\;\frac{\partial Wn}{\partial x}+\left(1-\frac{1}{\rho_c}\right)\frac{\partial N}{\partial t}\;-\;\frac{n}{\rho_c}\frac{\partial N^{(S-1)}}{\partial t}+\\
&+\frac{N}{\rho_c}\frac{\partial n^{(S-1)}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_c}\frac{\partial (nN)^{(S-1)}}{\partial t}=\frac{1}{Pe}\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial n}{\partial x}\right)+\frac{\chi_b}{n_0W_0}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},
\end{aligned}\tag{10}
$$

где $Pe=\dfrac{H_0u_0}{D}$ – число Пекле.

Краевые условия задачи (1) – (10) записываются в виде

$$
\begin{cases}
n=1,\quad N=0 \;\; \textit{при} \;\; t=0,\\
n=1 \;\; \textit{при} \;\; x=0,\\
n=0 \;\; \textit{при} \;\; x=1
\end{cases}\tag{11}
$$

С учетом кольматации пор фильтра гель-частицами формулы (7) и (8) принимают вид

$$
m=\left[m_1+\delta\left(m_0-m_1\right)\right]\frac{m_1-\dfrac{N}{\rho_c}}{m_1},\tag{12}
$$

$$
k=\frac{Ak_0}{S_0^2}\frac{m^3}{(1-m)^2}\left(1-\sqrt{\delta}\right)^3.\tag{13}
$$

В строгой постановке решения уравнений (1), (9) – (11), (4) – (6) затруднительно, так как эти уравнения пришлось бы решать совместно на каждом временном слое. Однако, если в уравнении (4) – (6) значения n и N принять как известные (из предыдущего временного слоя), то решение задачи сильно упрощается, а уравнения фильтрования решаются, не зависимо от n и N.

Уравнение (11) с учетом (13) принимает вид

$$
q\frac{\partial \theta}{\partial t}+2\frac{\partial m\theta}{\partial t}+(1-m_0)\frac{\partial m\delta}{\partial t}+q_1\theta-q_2+m_1\theta\delta\frac{\partial q_0}{\partial t}+\frac{\partial u\theta}{\partial x}=\frac{\mu_0\alpha_\tau}{x_0^2}\frac{\partial \theta}{\partial x},\tag{14}
$$

где

$$
q_0=1-\frac{N}{\rho_c},\quad q=\delta\left[m_1q_1+(m_0-m_1)\,\delta\right],\; q_1=\lambda\left(2\theta^{(S-1)}-\gamma\delta\right)q,\; q_2=\lambda q\left(\theta^{(S-1)}\right)^2.
$$

Надо отметить, что даже в таком упрощенном виде без дополнительных предположений нельзя приводит их к расчетной схеме. Действительно, аппроксимируем, например, член $\dfrac{\partial m\theta}{\partial t}$ разностной схемой

$$
\frac{\partial m\theta}{\partial t}=\frac{(m\theta)_i-\overline{(m\theta)}_i}{\Delta t}=\frac{[q_0(m_1+a_0\delta)]_i-[\overline{q}_0(m_1+a_1\overline{q})\overline{\theta}]_i}{\Delta t}
$$

откуда видно, что необходимо иметь значения q_i $q_{0,i}=1-\dfrac{N_i}{\rho_c m_i}$ на данном временном слое.

Из уравнения (14) видно, что даже в таком упрощенном виде без дополнительных предположений нельзя их привести к расчетной схеме. Поэтому для численного решения задачи в уравнении (14) раскроем производные $\dfrac{\partial m\theta}{\partial t}$, $\dfrac{\partial m\delta}{\partial t}$, исключая $\dfrac{\partial \delta}{\partial t}$, и производя квазилинеаризацию, получаем

$$Q_1\frac{\partial\theta}{\partial t}+(Q_2+Q_3)\,\theta+a_1\delta-Q_0+\frac{\partial u\theta}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{15}$$

где

$$Q_0=2\lambda a_0q_0\big(\theta^{(s-1)}\big)^2,\quad Q_1=q+2q_0\,(m_1+a_0\delta)\,,\quad Q_2=[2m_1-(m_1+a_0)\,\delta]\,\frac{\partial q_0}{\partial t},$$
$$Q_0=2\lambda q_0\left(2\theta^{(s-1)}-\gamma\delta\right),\;\; a_0=m_1-m_0.$$

Таким образом, уравнение (15) для численного решения задачи фильтрования предпочтительнее, чем непосредственная аппроксимация уравнения (14).

Отметим, что при решении задачи с переменной скоростью W коэффициент χ_b в уравнение баланса сорбции равно нулю, или что тоже P=Const и $\dfrac{\partial P}{\partial x}=0$. Случай переменной W и P здесь не рассматривается.

Для численного интегрирования указанных задач система уравнений аппроксимируется односторонней разностной схемой с точностью $O\,(h)$, и полученные алгебраические уравнения решаются методом прогонки.

Рассмотрим более простую модель процесса фильтрования, когда во втором уравнении системы (2) $W=const$. Кроме того, можно предположить, что на достаточной глубине от поверхности фильтра частицы, находящие во взвешенном состоянии, не оседают, а осевшие частицы не срываются. Тогда $\alpha\,(x,t)$ заменяем на $\theta_3\,(t)=\theta\,(\eta_2,t)$ и получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}+a_0\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+a_1\dfrac{\partial\delta}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\theta_3}{\partial t},\\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial t}=\lambda\,(\theta-\gamma\delta)\,,\\[2mm] \theta=\theta_0e^{-b_0x},\;\; \delta=0\;t=0,\\[2mm] \theta=\theta_0\;x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-ma_1\dfrac{\partial\delta}{\partial t}\;x=\eta_2.\end{cases} \tag{16}$$

Уравнение с краевыми условиями (16) является линейной системой с постоянными коэффициентами и, следовательно, допускает аналитическое решение.

Отметим, что линейная система, допускающая аналитическое решение, с одной стороны, служит модельной задачей для отладки программы численного интегрирования, с другой стороны – полученное аналитическое решение может служить для решения обратной задачи ТП фильтрования.

К системе (16) применяем преобразование Лапласа и получаем

$$\theta''-\frac{a_0}{D}\theta'-\frac{s\,(s+\lambda+\lambda_1)}{D\,(s+\lambda_1)}\theta=\frac{s\theta_3-\varphi_0}{D},\quad \theta\,(0,s)=\frac{\theta_0}{s},$$
$$\theta'\,(\eta_2,s)+\frac{b_1s}{s+\lambda_1}\theta\,(\eta_2,s)=0,\;\; \varphi_0=\theta_0e^{-b_0x},\;\; b_1=m\lambda a_1.$$

Производим замену переменных $\theta=ue^{kx}$ и получим

$$u''-\nu^2u=\varphi\,(x)\,, \tag{17}$$

$$\begin{cases} u\left(0,s\right)=\dfrac{\theta_0}{s}, \\ u'\left(r_2,s\right)+\left(k+\dfrac{b_1}{s+\lambda_1}\right)u\left(r_2,s\right)=0, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\nu^2=k^2+\frac{s\left(s+b_2\right)}{D\left(s+\lambda_1\right)},\quad k=\frac{a_0}{2D},\quad b_2=\lambda+\lambda_1.$$

Решение однородного уравнения (17) запишем в виде

$$u=Ae^{\nu x}+Be^{-\nu x}.$$

Тогда решение неоднородного уравнения следующее:

$$u=-C_1e^{kx}+C_2e^{-(b_0-k)x}+A_0e^{\nu x}+B_0e^{-\nu x}, \tag{19}$$

где

$$C_1=\frac{D\theta_3\left(s+\lambda_1\right)}{s+b_2},\ \ C_2=\frac{\theta_0}{D\left[\nu^2-\left(b_0-k\right)^2\right]}.$$

Коэффициенты A_0 и B_0 определяем из (18):

$$\frac{\theta_0}{s}=-q_1+q_2+A_0+B_0\quad при\quad x=0,$$

$$-kC_1e^{k\eta_2}-\left(b_0-k\right)C_2e^{-(b_0-k)\eta_2}+\gamma\left(A_0e^{\gamma\eta_2}-B_0e^{-\gamma\eta_2}\right)+$$

$$+\left(k+\frac{b_1}{s+\lambda_1}\right)\left(-C_1e^{k\eta_2}+C_2e^{-(b_0-k)\eta_2}+A_0e^{\gamma\eta_2}+B_0e^{-\gamma\eta_2}\right)=0\quad при\quad x=\eta_2.$$

Решая их совместно, находим

$$A_0=\frac{q_0+q_0'q_2}{q_1+q_2},\quad B_0=\frac{q_0'q_1-q_0}{q_1+q_2},$$

$$q_0=C_1\left(2k+\frac{b_1}{s+\lambda_1}\right)e^{k\eta_2}+\ C_2\left(b_0-\frac{b_1}{s+\lambda_1}\right)e^{-(b_0-k)\eta_2}, {q'}_0=C_1-C_2,$$

$$q_1=C_1\left(\gamma+k+\frac{b_1}{s+\lambda_1}\right)e^{\gamma\eta_2},\quad q_2=C_2\left(\gamma-k-\tfrac{b_2s}{s+\lambda_1}\right)e^{-\gamma\eta_2}.$$

В первом приближении будем считать, что

$$b_0=0,\quad \theta_3=0. \tag{20}$$

Это означает, что начальное распределение $\theta\left(x,0\right)$ постоянное. Допущение $\theta_3 = = 0$ правомерно, что следует из того, что на выходе через грань $x=\eta_2$ концентрация взвеси всецело определяется граничным условием (18).

Отметим, что последнее условие (18) было получено из первых двух уравнений (16) в предположении, что за начальное время принято то время, когда фильтрат начинает выходить через грань $x=\eta_2$. Так как время достижения фильтрата грани $x=\eta_2$ значительно меньше, чем продолжительность процесса, то, принимая в качестве второго условия указанное выражение, не противоречим условию поставленной задачи. Таким образом, решение задачи в изображениях, при условии (20), принимает следующий вид:

$$u(x,s)=\frac{-D\theta_0 b_2 e^{k\eta_2}(s+\lambda_1)\frac{sh\nu x}{\nu}}{s(s+b_2)\left[ch\nu\eta_2+\left(k+\frac{b_1}{s+\lambda_1}\right)\frac{sh\nu x}{\nu}\right]}+\theta_0\left[\frac{1}{s}-\frac{s+\lambda_1}{s(s+b_2)}\right]\cdot$$
$$\cdot\frac{ch\nu(x-\eta_2)-\left(k+\frac{b_1}{s+\lambda_1}\right)\frac{sh\nu(x-\eta_2)}{\nu}}{ch\nu\eta_2+\left(k+\frac{b_1}{s+\lambda_1}\right)\frac{sh\nu x}{\nu}}+\frac{\theta_0(s+\lambda_1)}{s(s+b_2)}. \tag{21}$$

Решение (21) является отношением двух обобщенных полиномов $\Phi(s)/\psi(s)$ относительно s, причем полином $\psi(s)$ не содержит постоянную, т.е. все условия теоремы разложения соблюдены, поэтому ее можно применить при переходе от изображения к оригиналу:

$$L^{-1}\left[\Phi(s)/\psi(s)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(s)}{\psi'(s)}e^{s_n t}.$$

Таким образом, аналитическое решение поставленной задачи окончательно получаем в следующем виде:

$$\theta(x,t)=\theta_0 e^{kx}\left\{\left(2\lambda_1-\frac{\lambda_1-b_2}{b_2}e^{-b_2 t}\right)kchk(x-\eta_2)-\right.$$
$$-(k\lambda_1+b_1)shk(x-\eta_2)\times\left(1+\lambda_1-\tfrac{\lambda_1-b_2}{b_2}e^{-b_2 t}\right)+$$
$$\left.+\chi b_2 e^{k\eta_2}\left(\lambda_1-\tfrac{\lambda_1-b_2}{b_2}e^{-b_2 t}\right)shkx\right\}\frac{1}{k\lambda_1 chk\eta_2+(k\lambda_1+b_1)shk\eta_2}-$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_0 Db_2 e^{k\eta_2}(s_{ni}+\lambda_1)\sin\frac{\mu_2 x}{\eta_2}e^{s_{ni}t}\left[Db_2 e^{k\eta_2}sh\gamma x+\gamma ch\gamma\eta_2(x-\eta_2)\right]-}{s_{ni}\left(F(s_{ni})\sin\mu_2+\frac{\mu_2}{\eta_2}\cos\mu_2\right)} \tag{22}$$
$$\underline{-(ks+k\lambda_1+b_1)sh\gamma(x-\eta_2)}$$

Здесь

$$F(s_{ni})=\frac{s_{ni}(s_{ni}+2\lambda_1)}{2D(s_{ni}+\lambda_1)}\left[\eta_2\sin\mu_2-\frac{1+\eta_2^2(ks_{ni}+\lambda_1+b_1)}{\mu_2}\cos\mu_2\right].$$

3 Выводы.

Получено аналитическое решение для интегрирования задачи технологического процесса ионообменного фильтрования суспензии через ионитного фильтра.

Используя полученные численные и аналитические решения задач технологического процесса ионообменного фильтрования суспензии, можно прогнозировать и определять основные технологические параметры объекта и их приемлемые диапазоны изменения.

Для учета заполнение пор фильтра гель-частицами в математической постановке задачи учитывается влияние ионного обмена на пористость и проницаемость ионитного фильтра и приведен закон его изменения.

Аналитическое решение полученной модельной задачи можно использовать для решения обратной задачи фильтрования, а также для доказательства адекватности разработанных математических моделей технологического процесса фильтрования суспензий через пористую среду.

Литература

[1] *Andrii Safonyk, Andrii Bomba.* Mathematical modeling process of liquid filtration taking into account reverse influence of process characteristics on medium characteristics // International Journal of Applied Mathematical Research, 2015. Vol. 1. №4. Pp. 7–14.

[2] *Fernandez X.R., Rosenthal I., Anlauf H., Nirschl H.* Experimental and analytical modeling of the filtration mechanisms of a paper stack candle filter // Chemical Engineering Research and Design, 2011. Vol. 89. №12. Pp. 2776–2784.

[3] *Gitisa Vitaly et al.* Deep-bed filtration model with multistage deposition kinetics // Chemical Engineering Journal, 2010. №163. Pp. 78–85.

[4] *Golubev V.I., Mixaylov D.N.* Modeling of the dynamics of filtration of a two-particle suspension porous among // TRUDI MFTI, 2011. T. 3. №2. Pp. 143–147.

[5] *Leontev N.E.* On the description of flows of a weakly compressible fluid in porous media under the nonlinear law of filtration // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas, 2013. №3. Pp. 132–137.

[6] *Leontev N.E, Tatarenkova D.A.* Exact solutions of nonlinear equations for the flow of a suspension in a porous medium // Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics, Mechanics, 2015. №3. Pp. 44–53.

[7] *Lo C.Y., Bolton M.D., Cheng Y.P.* Velocity fields of granular flows down a rough incline: a DEM investigation, Granular Matter. 2010. Pp. 477–482.

[8] *Mirzaxmetov M.M., Torubara V.N., Nurkenov J.E.* Technological modeling of the filtering process and the use of its results in optimizing the operation of filters // Bulletin of the Eurasian National University named after LN Gumilev Serial Natural and technical sciences, 2010. №2(75). Pp. 106–112.

[9] *Nadezhdin I.S. et al.* Mathematical Modeling of EDM Method of Water Purification // Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists, 2016. T. 1. Pp. 27–31.

[10] *Petre I.M., Kutzbach H.D.* Modeling and simulation of grain threshing and separation in threshing units – Part I // Computers and Electronics in Agriculture, 2008. №60(1). Pp. 96–104.

[11] *Monteiro P.J., Rycroft Ch.H., Barenblatt G.I.* A mathematical model of fluid and gas flow in nanoporous media // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2012. Vol. 109. №50. Pp. 20309–20313.

[12] *Carlos Andre V. Burkert, Geraldo N.O. Barbosa, Marcio A. Mazutti., Francisco Maugeri.* Mathematical modeling and experimental breakthrough curves of cephalosporin C adsorption in a fixed-bed column // Process Biochemistry, 2011. №46. Pp. 1270–1277.

[13] *Lucas S., Calvo M.P., Palencia C., Alonso E., Cocero M.J.* Mathematical model of supercritical CO2 adsorption on activated carbon applied to adsorption scale-up // The Journal of Supercritical Fluids, 2007. Vol. 40. №3. Pp. 331–504.

[14] *Zhang J. et al.* Development and validation of a novel modeling framework integrating ion exchange and resin regeneration for water treatment // Water Research, 2015. T. 84. C. 255–265.

[15] *Ravshanov N., Palvanov B.Yu. Muxamadiyev A.* Computer modelling of process of filtering of the liquid of the ionized solutions for protection of the ecosystem from of pollution sources // TUIT Bulletin, 2015. № 2. Pp. 100–105.

[16] *Ravshanov N., Palvanov B. Yu.* Численные решения задачи фильтрования малоконцентрированных суспензии // Наука и общество: международная конференция. Научно-информационный центр «Знание» г.Донецк, 2014. С. 39–42.

[17] *Ravshanov N., Palvanov B.Y., Elmurodova B.* Computer modelling of problems filtering low-concentration suspensions // Theoretical & Applied Science, 2016. № 9(41). Pp. 85–94. doi: `http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.15863/TAS`.

[18] *Ravshanov N., Palvanov B.Y.* Numerical solution of inverse problems filtering process of low-concentration solutions // Theoretical & Applied science, 2017. № 4(48). Pp. 85–94. doi: `http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.15863/tas`.

[19] *Равшанов Н., Палванов Б.Ю.* Приближенно-аналитическое решение задачи технологического процесса фильтрования растворов от нежелательных ионов // Электронный научный журнал "Исследования технических наук", 2016. № 1(19). С. 25–36.

[20] *Воробев Е.И., Немирович П.М.* Математическая модель процесса фильтрования сатурационных соков сахарного производства // Известия ВУЗОВ. Пищевая технология, 1990. № 4. С. 66–68.

[21] *Гончарова Е.Н., Семенова И.П., Статкус М.А., Цизин Г.И.* Градиентное ВЭЖХ разделение алкилфосфоновых кислот на пористом графитированном сорбенте Hyper-Carb с использованием водного раствора муравьиной кислоты в качестве подвижной фазы // Вестник Московского университета. Серия 2. Химия., 2017. № 6. С. 275–280.

[22] *Милевская В.В., Бутыльская Т.С., Темердашев З.А., Статкус М.А., Киселева Н.В.* Кинетика извлечения биологически активных веществ из лекарственного растительного сырья различными способами экстракции // Вестник Московского университета. Серия 2. Химия., 2017. № 6. С. 281–289.

[23] *Евстигнеев В.В., Исаева Ж.М., Пролубников В.И., Тубалов Н.П.* Математическая модель фильтрования пористой цилиндрической поверхностью СВС-фильтра // Ползуновский вестник, 2011. С. 34–39.

[24] *Туйкина С.Р.* Определение коэффициентов сорбции решением обратной задачи // Научная журнал Математическое моделирования. МГУ, 1997. Т. 9. № 8. С. 96–104.

[25] *Корниенко Т.С., Загорулько Е.А., Бондарева Л.П., Гапеев А.А.* Сорбционные и хроматографические процессы//, 2011. Т. 11. № 6. С. 895–899.

[26] *Гантман А.И.* Математическая модель смешанно-диффузионной динамики ионообменной сорбции // ЖФХ, 1995. Т. 69. № 10. С. 1816–1819.

[27] *Нестер А.А., Демчик С.П.* Фильтрование отработанных водных растворов в гальваническом производстве // Журнал «Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета)», 2013. № 18(44). С. 3–7. doi: `http://dx.doi.org/10.3114/S187007708007`.

[28] *Токмачёв М.Г., Тихонов Н.А., Хамизов Р.Х.* Использование математического моделирования для оптимизации параметров работы блока умягчения в промышленной установке комплексной переработки морской воды // Сорбционные и хроматографические процессы, Воронеж, 2010. Т. 10. № 3. С. 363–370.

[29] *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Пер. с англ. — М.: Мир, 1968. 186 с.

Поступила в редакцию 22.09.2018

UDC 519.6

MODEL PROBLEM OF THE TECHNOLOGICAL PROCESS OF ION-EXCHANGE FILTERING OF THE SUSPENSION AND THEIR NUMERICAL ANALYTICAL DECISION

[1]***Ravshanov N.***, [2]***Saidov U.***

`ravshanzade-09@mail.ru; usaidov@umail.uz`

[1]Scientific and innovation center of information and communication technologies at the Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Kharizmi, Tashkent, Uzbekistan;

[2]Samarkand branch of the Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Kharizmi, Samarkand, Uzbekistan

The article presents the discussion of the problem of environmental protection: protection of groundwater from pollution sources by ion-exchange filtration of ionized liquid solutions from heavy ionic compounds ejected from objects of manufacturing.

In order to choose the right strategy for solving problems, the scientific and research works for the last 5-10 years were analyzed related to the problem of mathematical modeling of non-stationary technological processes of filtering the suspension by using mechanical and ion-exchange filters used in manufacturing: preparation and reprocessing of public goods and others.

To conduct a comprehensive study of the above mentioned processes, the paper presents a mathematical tool, which is a mathematical model and its approximate analytical solution, which describes a system of nonlinear differential equations in partial derivatives.

In the article for numerical integration of the task with the aim of suppressing small-scale oscillation is added to the term «artificial viscosity» with some numerical parameter - the coefficient of «artificial viscosity», and the nonlinear terms of the equation are linearized by the Bellman-Kalaba quasi-linearization method.

Since, in the filtering process of a suspension, the pores of the filter are filled with gel particles, in a mathematical formulation of the problem the effect of ion exchange on the porosity and permeability of the ion-exchange filter is taken into account and the law of its change is given.

Keywords: mathematical model, approximate analytical solution, numerical algorithm, technological process, filtering, suspension, computational experiment.

Citation: Ravshanov N., Saidov U. 2018. Model problem of the technological process of ion-exchange filtering of the suspension and their numerical analytical decision. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 6(18): 101–113.