УДК 577.3.01:577.38

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ ТИПА КОЛМОГОРОВА-ФИШЕРА С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Мухамедиева Д.К.
старший научный сотрудник-исследователь,
Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий,
тел: +(99893) 534-60-30, e-mail: matematichka@inbox.ru

В статье исследуется популяционные процессы типа реакция-диффузия с нелинейными (степенными) коэффициентами диффузии и построение устойчивых разностных схем и способы линеаризации с дальнейшей визуализацией приближенного решения с применением современных компьютерных технологий, благодаря чему можно получить нелинейные эффекты. Выяснилось, что секрет успеха в математическом моделировании является сочетание вычислительного эксперимента с применением и развитием качественных и аналитических методов теории автомодельных и приближенно-автомодельных уравнений и уравнений в частных производных. Одним из эффективных методов исследования автомодельных решений является метод нелинейного расщепления и метод эталонных уравнений.

Ключевые слова: параболическая система квазилинейных уравнений, автомодельное уравнение, метод нелинейного расщепления, метод эталонных уравнений.

NUMERICAL MODELING OF A CLASS OF SYSTEMS OF QUASILINEAR PARABOLIC REACTION-DIFFUSION EQUATION OF THE KOLMOGOROV-FISHER DOUBLE NONLINEAR DIFFUSION

Mukhamediyeva D.K.

The paper investigates the population processes of reaction-diffusion type with non-linear (degree), diffusion coefficients and the construction of stable difference schemes and methods of linearization with further visualization of the approximate solutions using modern computer technology, so you can get a non-linear effects. It turned out that the secret to success in mathematical modeling is a combination of computer simulation of the application and the development of qualitative and analytical methods of the theory of self and self-approximate equations and partial differential equations. One effective method of self-study is the method of making and method of nonlinear splitting reference equations.

Keywords: parabolic system of quasi-linear equations, similar equation, nonlinear splitting method, method of reference equations

ИККИ КАРРА НОЧИЗИҚЛИ ДИФФУЗИЯЛИ КОЛМОГОРОВ-ФИШЕР ТИПИДАГИ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ КВАЗИЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ПАРАБОЛИК СИСТЕМАСИ БИР СИНФИНИ ЧИЗИҚЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

Мухамедиева Д.К.

Мақолада диффузиянинг ночизиқли (даражали) коэффициентли реакция-диффузия типидаги популяцион жараёнлар ва турғун айирмали схемаларни қуриш ҳамда замонавий компьютер технологияларини қўллаган ҳолда визуализация қилиш билан чизиқлаштириш усуллари тадқиқ қилинган. Математик моделлаштиришда ютуқнинг сири ҳисоблаш тажрибасининг хусусий ҳосилали тенгламалар ҳамда автомодел ва тақрибий автомодел тенгламалар назариясининг сифатли ва аналитик усулларини ривожлантириш ва қўллашнинг уйғунлигида ҳисобланиши аниқланди. Автомодел ечимларни тадқиқ қилишнинг энг самарали усулларидан бири ночизиқли бўлиниш ва эталонли тенгламалар усуллари ҳисобланади.

Калит сўзлар: квазичизиқли тенгламалар параболик системаси, автомодел тенглама, ночизиқли бўлиниш усули, эталон тенгламалар усули.

1. Введение

В последнее десятилетие в связи с возрастанием интереса к проблемам структурообразования изучение моделей многокомпонентных конкурирующих биологических систем в классе систем нелинейных уравнений типа реакция-диффузия получило новый импульс. Введение предположения о пространственности ареала обитания конкурирующих видов позволяет по другому взглянуть на процессы и результаты конкуренции. Одной из особенностей и трудностей изучаемых математических моделей является неединственность решения, что существенно отличает их от классических задач с единственным решением. Поэтому возникают следующие проблемы:

- найти «хорошее» приближение к каждому решению;
- сконструировать итерационный метод, который: сходится всегда к искомому решению (соответствующему начальному приближению), сходится быстро, обеспечивает достаточную точность.

2. Класс параболических систем двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейной

В области $Q=\{(t,x):\ 0<t, x\in R\}$ рассмотрен класс параболических систем двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейной диффузией

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=div(D_1 u_2^{m_1-1}\left|\nabla u_1\right|^{p-2}\nabla u_1)+f_{\beta_1}(u_1); \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=div(D_2 u_1^{m_2-1}\left|\nabla u_2\right|^{p-2}\nabla u_2)+f_{\beta_2}(u_2); \end{cases}$$

$$u_1\big|_{t=0}=u_{10}(x),\ u_2\big|_{t=0}=u_{20}(x),$$

которое описывает процесс биологической популяции типа Колмогорова-Фишера в нелинейной двухкомпонентной среде при $f_{\beta_1}(u_1)=k_1u_1(1-u_1^{\beta_1})$, $f_{\beta_2}(u_2)=k_2u_2(1-u_2^{\beta_2})$, где $k_1=1/\beta_1$, $k_2=1/\beta_2$ и,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=div(D_1 u_2^{m_1-1}\left|\nabla u_1\right|^{p-2}\nabla u_1)+k_1u_1(1-u_1^{\beta_1}) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=div(D_2 u_1^{m_2-1}\left|\nabla u_2\right|^{p-2}\nabla u_2)+k_2u_2(1-u_2^{\beta_2}) \end{cases} \qquad (1)$$

коэффициенты диффузии которых равны $D_1u_2^{m_1-1}\left|\nabla u_1\right|^{p-2}$, $D_2u_1^{m_2-1}\left|\nabla u_2\right|^{p-2}$, где $m_1, m_2, p, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1=u_1(t,x)\ge 0$, $u_2=u_2(t,x)\ge 0$ - искомые решения. При

$$\beta_i\to 0\ \ \lim_{\beta_i\to 0} f_{\beta_i}(u_i)=u_i\lim_{\beta_i\to 0}\left[\frac{1}{\beta_i}(1-u^{\beta_i})\right]=\overline{f}(u_i),$$

$$\overline{f}(u_i)=-u_i\ln u_i,\ i=1,2.$$

Исследованы качественные свойства рассматриваемой задачи путем построением автомодельной системы уравнений для (1).

Автомодельная система уравнений построена методом нелинейного расщепления.

Рассмотрим автомодельные системы (1) вида

$$\begin{cases} \xi^{1-N}\dfrac{d}{d\xi}(\xi^{N-1}f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi})+\dfrac{\xi}{p}\dfrac{df_1}{d\xi}+ \\ \quad +\theta_1 f_1(1-f_1^{\beta_1}); \\ \xi^{1-N}\dfrac{d}{d\xi}(\xi^{N-1}f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi})+\dfrac{\xi}{p}\dfrac{df_2}{d\xi}+ \\ \quad +\theta_2 f_2(1-f_2^{\beta_1}); \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$\theta_i=\frac{1}{(1-\left[\alpha_i(\mathrm{p}-2)+\alpha_{3-i}(\mathrm{m}_i-1)\right])\tau}.$$

Займемся построением верхнего решения для системы (19).

Если

$$\beta_i=[(\mathrm{p}-2)^2-(m_1-1)(m_2-1)]/[(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}-(\mathrm{m}_i+1)],$$

$$p>2+\sqrt{(m_1-1)(m_2-1)},\ i=1,2,$$

то уравнение (2) имеет локальное решение вида

$$\overline{f}_1(\xi)=A(a-\xi^{\gamma})_+^{n_1},\ \overline{f}_2(\xi)=B(a-\xi^{\gamma})_+^{n_2},$$

где

$$(b)_+=\max(0,b),\ \ \gamma=p/(p-1),$$

$$n_1=\frac{(p-1)(p-(m_1+1)}{(p-2)^2-(m_1-1)(m_2-1)};$$

$$n_2=\frac{(p-1)(p-(m_2+1)}{(p-2)^2-(m_1-1)(m_2-1)}.$$

Тогда в области Q согласно принципу сравнения решений имеем

Теорема 1. Пусть $u_i(0,x)\le u_{i\pm}(0,x),\ x\in R.$ Тогда для решение задачи (1) в области Q имеет место оценка

$$\begin{aligned} u_1(t,x)&\le u_{1+}(t,x)=e^{k_1t}\tau^{-\alpha_1}\overline{f}_1(\xi), \\ u_2(t,x)&\le u_{2+}(t,x)=e^{k_2t}\tau^{-\alpha_2}\overline{f}_2(\xi), \end{aligned} \qquad \xi=|x|/\tau^{1/p}$$

где $\overline{f}_1(\xi),\ \overline{f}_2(\xi)\ u\ \tau(t)$ -определенные выше функции.

Постоянную a можно найти из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}E_{P_1}(x,\tau)dx=P_1,\ \int_{-\infty}^{\infty}E_{P_2}(x,\tau)dx=P_2,$$

где

$$E_{P_1}(x,\tau)=\tau^{-\frac{1}{\mu_1}}(a-\xi_1^{\gamma})_+^{n_1},$$

$$E_{P_2}(x,\tau)=\tau^{-\frac{1}{\mu_2}}(a-\xi_2^{\gamma})_+^{n_2},$$

$$\xi_i=|x|/\tau^{1/\mu_i},\ \ \mu_i=m_i+2p-3,\ i=1,2.$$

Для этого доказана следующая теорема:

Теорема 2. Если $E_{P_i}(x,\tau),\ \mathrm{i}=1,2$ решение следующей системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 u_2^{m_1-1} \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 u_1^{m_2-1} \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right), \end{cases}$$

то для решения системы (1) справедливо следующее выражение

$$\lim_{\tau\to\infty}\left|u_1(x,\tau) - E_{P_1}(x,\tau)\right| = 0,$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left|u_2(x,\tau) - E_{P_2}(x,\tau)\right| = 0 \qquad (3)$$

в множестве

$$\left\{x \in R : |x| < c\tau^{1/\mu},\ c = \max\{c_1, c_2\} > 0\right\}.$$

С учетом теоремы 2, определим a следующим образом.

Если выполнено условие (3), то a определяется следующим образом:

$$a = [P_1\gamma / B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_1)]^{\frac{\gamma}{n_1}} = [P_2\gamma / B(\frac{1}{\gamma}, 1+n_2)]^{\frac{\gamma}{n_2}}.$$

Проведен вычислительный эксперимент и получены численные результаты.

3. Параболическая система двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера

В области Q={(t,x): 0< t < ∞, x∈R} рассмотрена параболическая система двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a_{11}u_1^m + a_{12}u_2^m)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ \qquad \left. + (b_{11}u_1^m + b_{12}u_2^m)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right] + k_1(t)u_1(1-u_2^{\beta_1}); \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a_{21}u_1^m + a_{22}u_2^m)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ \qquad \left. + (b_{21}u_1^m + b_{22}u_2^m)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right] + k_2(t)u_2(1-u_1^{\beta_2}). \end{cases} \qquad (4)$$

a_{ij}, b_{ij} - положительные вещественные числа, $\beta_1, \beta_2 \ge 0$, $u_1 = u_1(t,x) \ge 0$, $u_2 = u_2(t,x) \ge 0$ - искомые решения. При $a_{ij} \ne 0$, $b_{ij} = 0$ или $a_{ij} = 0$, $b_{ij} \ne 0$ математическая модель (4) представляет собой систему типа реакция-диффузия с коэффициентами диффузии $a_{ij}u_i^m \ge 0, b_{ij}u_i^m \ge 0$. В случае, когда хотя бы один из коэффициентов $a_{ij} \ne 0$ и $b_{ij} \ne 0$ (знак может быть любым), система (4) является кросс-диффузионной (взаимно-диффузионной для i,j=1,2).

Качественные свойства рассматриваемой задачи исследуются путем построения автомодельной системы уравнений для (4).

Тогда получена автомодельная система

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left[(a_{11}f_1^m + a_{12}f_2^m)\dfrac{df_1}{d\xi} + (b_{11}f_1^m + b_{12}f_2^m)\dfrac{df_2}{d\xi} \right] + \\ + \dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_1}{d\xi} + \psi_1 f_1(1-f_2^{\beta_1}) = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left[(a_{21}f_1^m + a_{22}f_2^m)\dfrac{df_1}{d\xi} + (b_{21}f_1^m + b_{22}f_2^m)\dfrac{df_2}{d\xi} \right] + \\ + \dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_2}{d\xi} + \psi_2 f_2(1-f_1^{\beta_2}) = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

а $\tau_1 = \tau_1(t)$ выбирается так

$$\tau_1(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{T}+\tau)^{-\gamma_1 m+1}}{-\gamma_1 m+1}, & если\ -\gamma_1 m + 1 \ne 0, \\ \ln(T+\tau), & если\ -\gamma_1 m + 1 = 0, \\ (T+\tau), & если\ m = 0, \end{cases}$$

если $\gamma_2 m_1 = \gamma_1 m_2$.

Система (5) имеет приближенное решение вида

$$\overline{f}_1 = A(a - b\xi^2)_+^{\eta_1},\ \overline{f}_2 =$$

$$= B(a - b\xi^2)_+^{\eta_2}\ \ (y)_+ = \max(0, y).$$

I случай

$$\eta_1 = \eta_2,\ \eta_1 = \frac{1}{m},$$

а коэффициенты A и B определяются из решения системы некоторых нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left[a_{11}A^m + a_{12}B^m\right]\cdot\eta_1 A + \\ + \left[b_{11}A^m + b_{12}B^m\right]\cdot\eta_2 B\cdot(-2b) = A, \\ \left[a_{21}A^m + a_{22}B^m\right]\cdot\eta_1 A + \\ + \left[b_{21}A^m + b_{22}B^m\right]\cdot\eta_2 B\cdot(-2b) = B. \end{cases}$$

II случай

$$a_{11} = 0;\ a_{12} \ne 0;\ b_{11} = 0;\ b_{12} = 0;$$

$$a_{21} = 0;\ a_{22} = 0;\ b_{21} \ne 0;\ b_{22} = 0;$$

$$\eta_2 = \frac{1}{m}, \quad \eta_1 = \frac{1}{m},$$

а коэффициенты A и B определяются из решения некоторой системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a_{12}B^m \cdot \eta_1(-2b) = 1,$$

$$b_{21}A^m \cdot \eta_2(-2b) = 1.$$

III случай

$$a_{11} = 0;\ a_{12} = 0;\ b_{11} = 0;\ b_{12} \ne 0;$$

$$a_{21} \ne 0;\ a_{22} = 0;\ b_{21} = 0;\ b_{22} = 0;$$

$$\eta_1 = \frac{m+2}{(\mathrm{m}+1)^2 - 1},\ \eta_2 = \frac{m+2}{(\mathrm{m}+1)^2 - 1},$$

а коэффициенты A и B определяются из решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_{12}B^{m+1}\cdot\eta_2(-2b) = A, \\ a_{21}A^{m+1}\cdot\eta_1(-2b) = B. \end{cases}$$

Может существовать три типа автомодельных режимов с обострением: HS, S и LS.

При $0<\beta_i<m_i$, $i=1,2$ реализуется HS−режим. Исследования показали, что автомодельная задача в этом случае имеет единственную собственную функцию, монотонно убывающую на отрезке с максимумом в центре симметрии. Автомодельное решение представляет собой волну, амплитуда и фронт которой увеличиваются в режиме с обострением.

При $\beta_i=m_i$, $i=1,2$ имеет место S−режим. Автомодельное решение представляет собой нестационарную диссипативную локализованную структуру. Внутри области локализации количество особи растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю.

Автомодельное решение в LS−режиме представляет собой нестационарную диссипативную структуру; все точки которой движутся к центру симметрии, решение при $T=-\tau$ обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии. Автомодельные решения могут существовать при $\beta_i>m_i$, $i=1,2$.

Ниже приводятся результаты численных экспериментов для различных значений параметров.

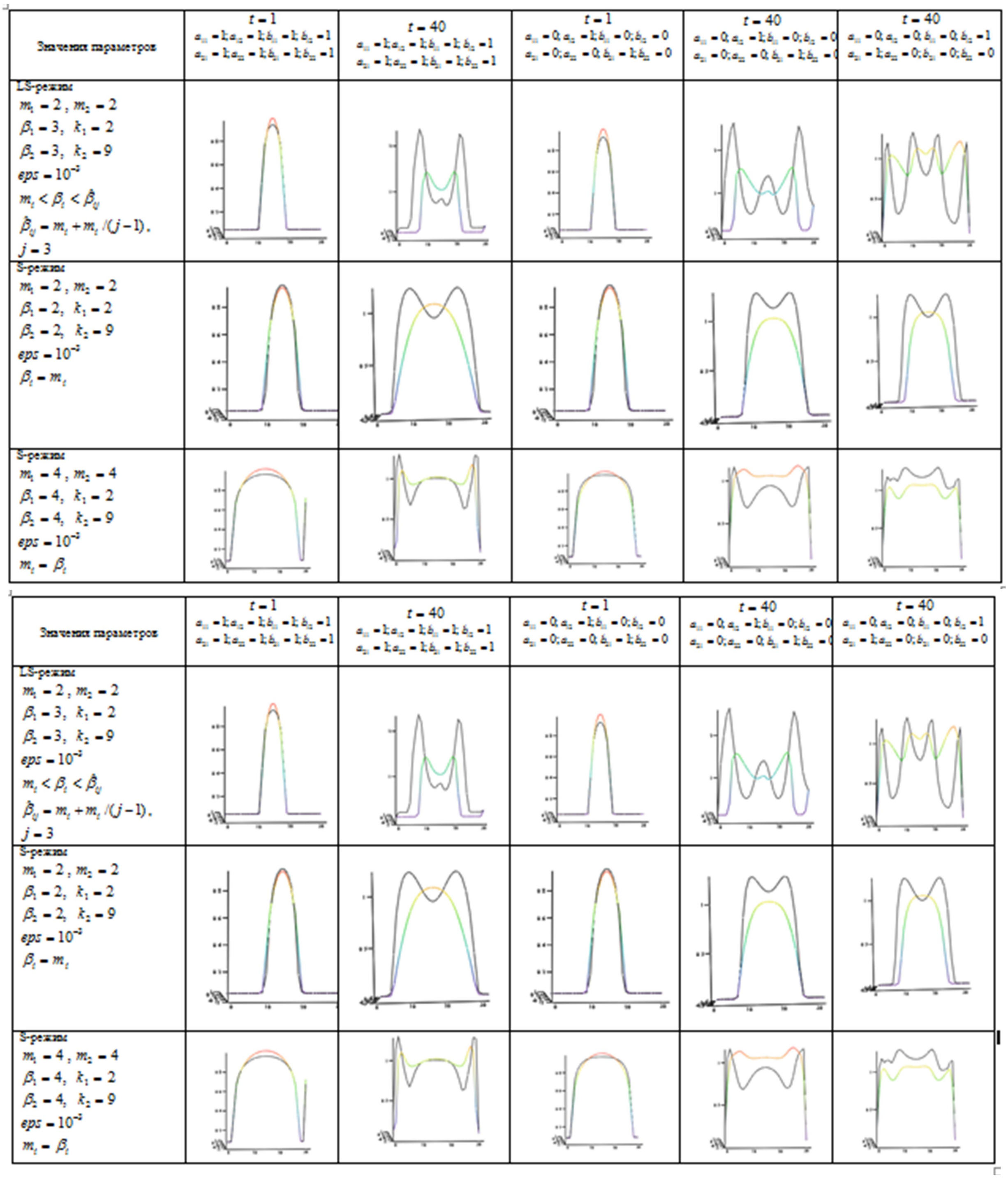

Рис. 1. Результаты вычислительного эксперимента

4. Заключение

Проведенный анализ показал, что собственная функция с номером $j = 2,3,4,...$ существует в интервале $m_i < \beta_i < \hat{\beta}_{ij}$, где

$$\hat{\beta}_{ij} = m_i + m_i / (j-1), \ i = 1,2, \ j = 2,3,4,... \qquad (6)$$

Значения $\beta_i = m_i$ и $\beta_i = \hat{\beta}_{ij}$ являются точками бифуркации, в которых прекращает свое существование СФ . Первая СФ существует при любом значении $\beta_i > m_i$, $i = 1,2$. Из (6) следует, что при $\beta_i > \hat{\beta}_{i2} = 2m_i$, $i = 1,2$ автомодельная задача в LS режиме может иметь только одну собственную функцию.

Чем больше номер СФ, тем уже интервал по параметру β_i, в котором она существует.

Число собственных функций *N*, которое имеет автомодельная задача при данных β_i и m_i определяется формулой, где $a_i = \beta_i / (\beta_i - m_i)$, $i = 1,2$:

$$N_i = \begin{cases} [a_i], \textit{если а нецелое}, \\ a_i - 1, \textit{если а целое}. \end{cases}$$

Последовательность точек бифуркации, определяющих правую границу области существования собственных функций, является бесконечной последовательностью, сходящейся к точке 1 + = ∞ σ β , которая является общей левой границей интервалов существования всех собственных функций в LS–режиме.

Литература

[1] *Мари Дж.* Нелинейные диффузионные уравнения в биологии. – М.: Мир, 1983. – 397 с.

[2] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. .Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. – 1937. – Том. 1. – С. 1-25.

[3] *Самарский А.А.*, *Курдюмов С.П.*, *Михайлов А.П.*, *Галактионов В.А.* Режим с обострением для квазилинейных уравнений параболического типа. – М.: Наука, 1987. – 487 с.

[4] *Арипов М.* Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. – Т.: Фан, 1988. – 137 с.

[5] *Kiguradze I.T.*, *Chanturiya T.A.* Asymptotic properties of solutions of no autonomous ordinary differential equations. – M.: Science, 1990. – 432 p.