УДК 577.3.01:577.38

КРОСС-ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЕЛИ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Арипов М.М.
д.ф.-м.н., проф., заведующий кафедрой Национального Университета Узбекистана,
тел.: (+99893) 398-57-52, e-mail: mirsaidaripov@mail.ru

Мухамедиева Д.К.
младший научный сотрудник Центра разработки программных продуктов и
аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: (+99893) 534-60-30, e-mail: matematichka@inbox.ru

Исследуются вопросы глобальной разрешимости задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера и качественные свойства решения задачи на основе автомодельного анализа. Рассмотрена параболическая система двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии которая описывает процесс биологической популяции типа Колмогорова-Фишера в нелинейной двухкомпонентной среде. Предложены подходящие начальные приближения для быстро сходимого итерационного процесса. Исследованы качественные свойства рассматриваемой задачи путем построения автомодельной системы уравнений. Методом нелинейного расщепления посторена автомодельная система уравнений.

Ключевые слова: кросс-диффузия, биологическая популяция, параболическая система квазилинейных уравнений, начальное приближение, численное решение, итерационный процесс, автомодельные решения.

CROSS-DIFFUSIONAL MODELS OF CONVECTIVE TRANSFER WITH DUAL NONLINEARITY

Aripov M.M., Mukhamediyeva D.K.

In the present work are examined the issues of global solvability of the Kolmogorov-Fisher type biological population task and qualitative properties of the solution of the task based on the self-similar analysis. Considered parabolic system of two quasilinear equations of reaction-diffusion which describes the process of Kolmogorov-Fisher type biological population in a nonlinear two-component environment. Investigated qualitative properties of the considered problem by constructing self-similar system of equations. By the method of nonlinear splitting was built self-similar system of equations.

Keywords: cross-diffusion, biological population, parabolic system of quasi-linear equations, initial approximation, numerical solution, iterative process, self-similar solutions.

IKKI KARRA NOCHIZIQLI KONVEKTIV KO'CHISHLI KROSS-DIFFUZIYA MODELLARI

Aripov M.M., Muxamediyeva D.K.

Mazkur ishda avtomodel tahlil asosida Kolmogorov-Fisher tipidagi biologik populyatsiya masalasining global yechimga egalik masalalari o'rganildi. Nochiziqli ikki komponentali muhitda Kolmogorov-Fisher tipidagi biologik populyatsiya jarayonini tavsiflovchi reaksiya-diffuziyaning kvazichiziqli tenglamalar sistemasi ko'rib chiqildi. Tez yaqinlashuvchi iteratsiya jarayoni uchun mos boshlang'ich yaqinlashishlar taklif qilindi. Qaralayotgan masalaning sifat xossalari avtomodel tenglamalar sistemasini qurish yo'li bilan o'rganildi. Nochiziqli parchalash usuli yordamida avtomodel tenglamalar sistemasi qurildi.

Tayanch iboralar: kross-diffuziya, biologik populyatsiya, kvazichiziqli tenglamalarning parabolik sistemasi, boshlang'ich yaqinlashish, iteratsiya jarayoni, avtomodel yechim.

1. Введение

Рассмотрим в области $Q=\{(t,x):\ 0<t, x\in R\}$ параболическую систему двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 u_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)+l(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+ \\ +k_1(t)u_1\left(1-u_2^{\beta_1}\right), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 u_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)+l(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+ \\ +k_2(t)u_2\left(1-u_1^{\beta_2}\right), \end{cases} \tag{1}$$

$$u_1\big|_{t=0}=u_{10}(x),\ \ u_2\big|_{t=0}=u_{20}(x),$$

которая описывает процесс биологической популяции типа Колмогорова-Фишера в нелинейной двухкомпонентной среде. Коэффициенты диффузии равны $D_1 u_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}$, $D_2 u_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}$ и конвективным переносам со скоростью $l(t)$, где m_1, m_2, p, β_1, β_2 - положительные вещественные числа, $u_1=u_1(t,x)\ge 0$, $u_2=u_2(t,x)\ge 0$ - искомые решения.

Далее исследуем качественные свойства рассматриваемой задачи путем построения автомодельной системы уравнений для (1).

2. Автомодельная система уравнений

Автомодельную систему уравнений построим методом нелинейного расщепления [1].

Замена в (1):

$$u_1(t,x)=e^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta}v_1(\tau(t),\eta),\ \ \eta=x-\int_0^t l(\zeta)d\zeta,$$

$$u_2(t,x)=e^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta}v_2(\tau(t),\eta),\ \ \eta=x-\int_0^t l(\zeta)d\zeta$$

приведет (1) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau}=\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right)- \\ -k_1(t)e^{\left[(2-p)k_1+(\beta_1-m_1+1)k_2\right]t}v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau}=\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right)- \\ -k_2(t)e^{\left[(\beta_2-m_2+1)k_1+(2-p)k_2\right]t}v_1^{\beta_2}v_2, \end{cases} \tag{2}$$

$$v_1\big|_{t=0}=v_{10}(\eta),\ \ v_2\big|_{t=0}=v_{20}(\eta).$$

Если

$$(m_1-1)k_2+(p-2)k_1=(m_2-1)k_1+(p-2)k_2,$$

то, выбирая

$$\tau(t)=\frac{e^{[(m_1-1)k_2+(p-2)k_1]t}}{(m_1-1)k_2+(p-2)k_1}=\frac{e^{[(m_2-1)k_1+(p-2)k_2]t}}{(m_2-1)k_1+(p-2)k_2},$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau}=\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right)- \\ -a_1(t)\tau^{b_1}v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau}=\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right)- \\ -a_2(t)\tau^{b_2}v_1^{\beta_2}v_2, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$a_1=k_1\left((p-2)k_1+(m_1-1)k_2\right)^{b_1},$$

$$b_1=\frac{(2-p)k_1+(\beta_1-m_1+1)k_2}{(p-2)k_1+(m_1-1)k_2},$$

$$a_2=k_2\left((m_2-1)k_1+(p-2)k_2\right)^{b_2},,$$

$$b_2=\frac{(\beta_2-m_2+1)k_1+(2-p)k_2}{(m_2-1)k_1+(p-2)k_2}.$$

Если $b_i=0$ и $a_i(t)=const$, $i=1,2$, то система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau}=\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right)-a_1 v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau}=\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right)-a_2 v_1^{\beta_2}v_2. \end{cases}$$

Задача Коши для системы (3) в случае, когда $b_1=b_2=0$, изучена в работах [2-6], где также доказано существование волновых глобальных решений и blow-up решений.

С целью получения автомодельной системы для системы уравнений (3) найдем сначала решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar v_1}{d\tau}=-a_1\bar v_1\bar v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{d\bar v_2}{d\tau}=-a_2\bar v_1^{\beta_2}\bar v_2, \end{cases}$$

вида

$$\bar v_1(\tau)=c_1(\tau+T_0)^{-\gamma_1},\ \ \bar v_2(\tau)=c_2(\tau+T_0)^{-\gamma_2},\ \ T_0>0,$$

где

$$c_1=1,\ \ \gamma_1=\frac{1}{\beta_2},\ \ c_2=1,\ \ \gamma_2=\frac{1}{\beta_1}.$$

А затем решение системы (1) ищется в виде

$$v_1(t,\eta)=\bar v_1(t)w_1(\tau,\eta),$$

$$v_2(\tau,\eta)=\bar v_2(t)w_2(\tau,\eta),$$

а $\tau=\tau(t)$ выбирается так:

$$\tau_1(\tau)=\int_0^\tau \bar v_1^{(p-2)}(t)\bar v_2^{(m_1-1)}(t)dt=$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\left[\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)\right]}\left(T+\tau\right)^{1-\left[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)\right]}, \\ \text{если}\, 1-\left[\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)\right]\neq 0, \\ \ln\left(T+\tau\right), \text{если}\, 1-\left[\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)\right]=0, \\ \left(T+\tau\right), \text{если}\; p=2 \;\; u \;\; m_1=1, \end{cases}
$$

если $\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)=\gamma_2\left(p-2\right)+\gamma_1\left(m_2-1\right)$.

Тогда для $w_i\left(\tau,x\right)$, $i=1,2$ получаем систему уравнений:

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(D_1 w_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial w_1}{\partial\eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_1}{\partial\eta}\right)+ \\ +\psi_1\left(w_1 w_2^{\beta_1}-w_1\right), \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(D_2 w_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial w_2}{\partial\eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_2}{\partial\eta}\right)+ \\ +\psi_2\left(w_2 w_1^{\beta_2}-w_2\right), \end{cases} \tag{4}
$$

где

$$
\psi_1=\begin{cases} \dfrac{1}{\left(1-\left[\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)\right]\right)\tau}, \\ \text{если}\;\; 1-\left[\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)\right]>0, \\ \gamma_1 c_1^{-\left(1-\left[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)\right]\right)}, \\ \text{если}\;\; 1-\left[\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)\right]=0, \end{cases}
$$

$$
\psi_2=\begin{cases} \dfrac{1}{\left(1-\left[\gamma_2\left(p-2\right)+\gamma_1\left(m_2-1\right)\right]\right)\tau}, \\ \text{если}\;\; 1-\left[\gamma_2\left(p-2\right)+\gamma_1\left(m_2-1\right)\right]>0, \\ \gamma_1 c_1^{-\left(1-\left[\gamma_2(p-2)+\gamma_1(m_2-1)\right]\right)}, \\ \text{если}\;\; 1-\left[\gamma_2\left(p-2\right)+\gamma_1\left(m_2-1\right)\right]=0, \end{cases}
$$

Представление системы (2) в виде (4) позволяет предполагать, что при $\tau\to\infty$ и $\psi_i\to 0$ решение последней системы асимптотически на фронте может стремиться к решению системы

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(D_1 w_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial w_1}{\partial\eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_1}{\partial\eta}\right), \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(D_2 w_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial w_2}{\partial\eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_2}{\partial\eta}\right). \end{cases}
$$

Это обстоятельство используется для нахождения начального приближения для построения итерационного процесса.

Если

$$
1-\left[\gamma_1\left(p-2\right)+\gamma_2\left(m_1-1\right)\right]\neq 0,
$$

то система (4) - волновое решение:

$$
w_i\left(\tau(t),\eta\right)=f_i\left(\xi\right),\;\; \xi=c\tau\pm\eta,\;\; i=1,2,
$$

где c - скорость волны, а функции $w_i\left(\tau(t),\eta\right)=f_i\left(\xi\right)$ находятся из системы автомодельных уравнений:

$$
\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right)+c\dfrac{df_1}{d\xi}+ \\ +\mu_1\left(f_1-f_1 f_2^{\beta_1}\right)=0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right)+c\dfrac{df_2}{d\xi}+ \\ +\mu_2\left(f_2-f_2 f_1^{\beta_2}\right)=0, \end{cases} \tag{5}
$$

$$
\mu_i=\frac{1}{\left(1-\left[\gamma_i\left(p-2\right)+\gamma_{3-i}\left(m_i-1\right)\right]\right)},\; i=1,2,
$$

которая имеет локализованное решение

$$
\bar f_1=A\left(a-\xi\right)_+^{n_1},\;\; \bar f_2=B\left(a-\xi\right)_+^{n_2},
$$

$$
n_1=\frac{\left(p-1\right)\left(p-\left(m_1+1\right)\right)}{n},\;\; n_2=\frac{\left(p-1\right)\left(p-\left(m_2+1\right)\right),}{n}
$$

$$
n=\left(p-2\right)^2-\left(m_1-1\right)\left(m_2-1\right),
$$

если

$$
p>2+\left[\left(m_1-1\right)\left(m_2-1\right)\right]^{1/2},\;\; p-\left(m_i+1\right)>0,\; i=1,2,
$$

$$
\beta_1=1/n_1,\;\; \beta_2=1/n_1.
$$

А коэффициенты A и B определяются из решения системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$
\left(n_1\right)^{p-1}A^{p-1}B^{m_1-1}=c,\;\; \left(n_2\right)^{p-1}A^{m_2-1}B^{p-1}=c.
$$

Тогда с учетом выражений

$$
u_1\left(t,x\right)=e^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta}v_1\left(\tau\left(t\right),\eta\right),
$$

$$
u_2\left(t,x\right)=e^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta}v_2\left(\tau\left(t\right),\eta\right)
$$

имеем

$$
u_1\left(t,x\right)=Ae^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta}\left(c\tau\left(t\right)-\xi\right)_+^{n_1},
$$

$$
u_2\left(t,x\right)=Be^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta}\left(c\tau\left(t\right)-\xi\right)_+^{n_2},\;\; c>0.
$$

В силу того, что $\left[b\tau\left(t\right)-\int_0^t l\left(\eta\right)d\eta-x\right]=0$, если

$$
x\geq\left[b\tau\left(t\right)-\int_0^t l\left(\eta\right)d\eta-x\right]<0,\;\; \forall t>0,
$$

то

$$
u_1\left(t,x\right)\equiv 0,\;\; u_2\left(t,x\right)\equiv 0,
$$

$$
x\geq\left[b\tau\left(t\right)-\int_0^t l\left(\eta\right)d\eta-x\right]<0,\;\; \forall t>0.
$$

Поэтому условием локализации решений системы (1) есть условия

$$
\int_0^e l\left(y\right)dy<0,\;\; \tau\left(t\right)<\infty \;\text{для}\; \forall t>0. \tag{6}
$$

Условие (6) есть условие появления нового эффекта – локализации волновых решений (6). Если же условие (6) не выполнено, то имеет место явление конечной скорости распространения возмущения, т.е.

$$u_i(t,x) \equiv 0$$

при $|x| \ge b(t)$, $\tau(t) = \int_0^t e^{-(m_1+p-3)\int_0^\zeta k_1(y)dy} d\zeta$,

причем фронт уходит сколь угодно далеко при возрастании времени, так как $\tau(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

3. Медленная диффузия

Случай $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $n > 0$ (медленная диффузия). Применяя метод [1] для решения уравнения (9), получаем следующие функции:

$$\bar{\theta}_1(\xi) = (a-\xi)_+^{n_1}, \ \bar{\theta}_2(\xi) = (a-\xi)_+^{n_2},$$

где $a > 0$,

$$(y)_+ = \max(y, 0), \ \xi < a.$$

Известно [1, 2], что для глобального существования решения задачи (1) функция $f(\xi)$ должна удовлетворять следующему неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_1}{d\xi} + \mu_1\left(f_1 - f_1 f_2^{\beta_1}\right) \le 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2\left(f_2 - f_2 f_1^{\beta_2}\right) \le 0, \end{cases}$$

а

$$\beta_1 = 1/n_2, \ \beta_2 = 1/n_1.$$

Возьмем функции $\bar{\theta}_1(\xi)$, $\bar{\theta}_2(\xi)$ и покажем, что они будут асимптотикой финитных решений системы (5).

Теорема 1. Финитное решение системы (5) при $\xi \to a_-$ имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \vartheta_i(\xi)$.

Доказательство. Будем искать решение уравнения (8) в следующем виде:

$$f_i = \bar{\vartheta}_i(\xi)\, y_i(\eta), \ i = 1,2, \qquad (7)$$

где $\eta = -\ln(a-\xi)$, причем $\eta \to +\infty$ при $\xi \to a_-$, что позволяет исследовать асимптотическую устойчивость решения задачи (5) при $\eta \to +\infty$. Подставляя (7) в (5), для $y_i(\eta)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\eta}\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right|^{p-2}\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right)\right) +$$
$$+\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right|^{p-2}\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right)\right) + \qquad (8)$$
$$+c\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) - \mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} y_i(\eta)(1+$$
$$+e^{-n_{3-i}\beta_i\eta} y_{3-i}^{\beta_i}) = 0,$$

где η - определенная выше функция.

Отметим, что изучение решения последнего уравнения равносильно изучению тех решений уравнения (5), каждое из которых в некотором промежутке $[\eta_0, +\infty)$ удовлетворяет неравенству

$$y_i(\eta) > 0, \ \frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \ne 0.$$

Покажем, прежде всего, что решения $y_i(\eta)$ уравнения (8) имеют конечный предел y_{0i} при $\eta \to +\infty$. Введем обозначения:

$$\omega_i(\eta) = y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right|^{p-2}\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right).$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\omega_i' = -\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\omega_i - c\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) -$$
$$-\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} y_i(\eta)\left(1+e^{-n_i\beta_i\eta} y_{3-i}{}^{\beta_i}\right).$$

Для анализа последнего выражения введем новую вспомогательную функцию

$$\phi(\tau,\eta) = -\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\tau - c\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) -$$
$$-\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} y_i(\eta)\left(1+e^{-n_i\beta_i\eta} y_{3-i}{}^{\beta_i}\right),$$

где τ - вещественное число.

Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении τ функция $\phi(\tau,\eta)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1, +\infty) \subset [\eta_0, +\infty)$ и при всех $\eta \in [\eta_1, +\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\omega_i'(\eta) > 0, \ \omega_i'(\eta) < 0.$$

И поэтому для функции $\omega_i(\eta)$ существует предел при $\eta \in [\eta_1, +\infty)$. Из выражения для $\omega_i(\eta)$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\omega_i'(\eta) =$$
$$= \lim_{\eta\to+\infty}\left\{\begin{matrix} -\left(\dfrac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\omega_i - c\left(\dfrac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) - \\ \mu_i\dfrac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta} y_{3-i}{}^{\beta_{3-i}}) \end{matrix}\right\} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\xi \to (a)-h, \ \lim_{\eta\to+\infty} e^{-\eta} \to 0, \ \lim_{\eta\to+\infty} a - e^{-\eta} \to a,$$
$$\omega_i' = 0,$$

получаем следующее алгебраическое уравнение:

1) $\beta_i > 1, \ i = 1,2,$

$$(n_1)^{p-1} y_2^{m_1-1} y_1^{p-1} = c,$$
$$(n_2)^{p-1} y_1^{m_2-1} y_2^{p-1} = c.$$

Решение последней системы дает $y_i = 1$ и, в силу (8), $f_i(\xi) \sim \bar{\vartheta}_i(\xi)$.

2) $\beta_i = 1/n_i, \ i = 1,2,$ y_i должно быть решением системы:

$$\left(n_1\right)^{p-1} y_2^{m_1-1} y_1^{p-2} + y_1^{n_1} y_2^{n_1(\beta_1-1)} = c,$$
$$\left(n_2\right)^{p-1} y_1^{m_2-1} y_2^{p-2} + y_1^{n_2(\beta_2-1)} y_2^{n_2} = c.$$

Теорема 1 доказана.

4. Быстрая диффузия

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\ n < 0$ (быстрая диффузия). Для (5) имеем $\chi_1(\xi) = (a+\xi\ )^{n_1}$, $\chi_2(\xi) = (a+\xi\ )^{n_2}$, где $a > 0$.

Теорема 2. При $\xi \to +\infty$ исчезающее на бесконечности решение задачи (5) имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \chi_i(\xi),\ i = 1,2$.

Доказательство. При доказательстве теоремы используется преобразование

$$f_i = \chi_i(\xi) y(\eta),\ i = 1,2,$$

где $\eta = \ln(a+\xi)$, которое приводит (6) к следующему виду.

Подставляя (8) в (5), для $y_i(\eta)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\eta}\left(y_{3-i}^{m_i-1} \left|\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right|^{p-2} \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right)\right) +$$
$$\left(\frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}} + n_i\right)\left(y_{3-i}^{m_i-1} \left|\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right|^{p-2} \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right)\right) + \qquad (9)$$
$$+c\left(\frac{dy_i}{d\eta} + n_i y_i\right) - \mu_i \frac{e^{\eta}}{a+e^{\eta}} y_i(\eta)(1+$$
$$+e^{-n_i\beta_i\eta} y_{3-i}{}^{\beta_i}) = 0,$$

где η - определенная выше функция.

Отметим, что изучение решения последнего уравнения равносильно изучению тех решений уравнения (5), каждое из которых в некотором промежутке $[\eta_0, +\infty)$ удовлетворяет неравенству

$$y_i(\eta) > 0,\ \frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \neq 0.$$

Покажем, прежде всего, что решения $y_i(\eta)$ уравнения (8) имеют конечный предел y_{0i} при $\eta \to +\infty$. Введем обозначения:

$$\omega_i(\eta) = y_{3-i}^{m_i-1} \left|\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right|^{p-2} \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right).$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\omega_i' = -\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\omega_i - c\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) -$$
$$-\mu_i \frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta} y_{3-i}{}^{\beta_i}).$$

Для анализа последнего выражения введем новую вспомогательную функцию

$$\phi(\tau,\eta) = -\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\tau - c\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) -$$
$$-\mu_i \frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta} y_{3-i}{}^{\beta_i}),$$

где τ - вещественное число.

Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении τ функция $\phi(\tau,\eta)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1, +\infty) \subset [\eta_0, +\infty)$ и при всех $\eta \in [\eta_1, +\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\omega_i'(\eta) > 0,\ \ \omega_i'(\eta) < 0.$$

И поэтому для функции $\omega_i(\eta)$ существует предел при $\eta \in [\eta_1, +\infty)$. Из выражения для $\omega_i(\eta)$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty} \omega_i'(\eta) =$$
$$= \lim_{\eta\to+\infty}\left\{\begin{matrix} -\left(\dfrac{e^{\eta}}{a-e^{\eta}} - n_i\right)\omega_i - c\left(\dfrac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) - \\ \mu_i \dfrac{e^{\eta}}{a-e^{\eta}} y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta} y_{3-i}{}^{\beta_i}) \end{matrix}\right\} = 0.$$

Отсюда, при $\xi \to \infty$, $\beta_i > 1,\ i = 1,2$, получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$\left(-n_1\right)^{p-1} y_2^{m_1-1} y_1^{p-1} = c,$$
$$\left(-n_2\right)^{p-1} y_1^{m_2-1} y_2^{p-1} = c.$$

Вычисление последнего уравнения дает $y_i = 1$ и, в силу (7), $f(\xi) \sim \chi_i(\xi)$.

Теорема 2 доказана.

Литература

[1] *Арипов М.* Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. – Ташкент: Фан – 1988. – 137 с.

[2] *Белотелов Н.В., Лобанов А.И.* Популяционные модели с нелинейной диффузией // Математическое моделирование. – Москва – 1997. – № 12. – С. 43-56.

[3] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука – 1976. – 288 с.

[4] *Гаузе Г.Ф.* О процессах уничтожения одного вида другим в популяциях инфузорий // Зоологический журнал. – Москва – 1934. – Т. 13.– № 1.

[5] *Aripov M., Muhammadiev J.* Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type // Buletin Stiintific-Universitatea din Pitesti. Seria Matematica si Informatica. – 1999. – № 3. – Pp. 19-40.

[6] *Aripov M.M., Muhamediyeva D.K.* To the numerical modeling of self-similar solutions of reaction-diffusion system of the one task of biological population of Kolmogorov-Fisher type // International Journal of Engineering and Technology. – 2013. – Vol. 02. – №11.